Minoration de la hauteur de Néron-Tate sur les surfaces abéliennes

Pazuki, Mehdi Fabien

Published in:
Manuscripta Mathematica

DOI:
10.1007/s00229-012-0593-7

Publication date:
2013

Document version
Early version, also known as pre-print

Citation for published version (APA):
Pazuki, M. F. (2013). Minoration de la hauteur de Néron-Tate sur les surfaces abéliennes. *Manuscripta Mathematica*, *142*, [61-99]. https://doi.org/10.1007/s00229-012-0593-7

MINORATION DE LA HAUTEUR DE NÉRON-TATE SUR LES SURFACES ABÉLIENNES

FABIEN PAZUKI

13 juin 2013

RÉSUMÉ : On obtient dans le présent texte des résultats en direction d'une conjecture de Lang et Silverman de minoration de la hauteur canonique sur les variétés abéliennes de dimension 2 sur un corps de nombres. La méthode utilisée est une décomposition en hauteurs locales. On déduit en corollaire une borne uniforme sur la torsion de familles de surfaces abéliennes et une borne uniforme sur le nombre de points rationnels de familles de courbes de genre 2.

ABSTRACT : This paper contains results concerning a conjecture made by Lang and Silverman, predicting a lower bound for the canonical height on abelian varieties of dimension 2 over number fields. The method used here is a local height decomposition. We derive as corollaries uniform bounds on the number of torsion points on families of abelian surfaces and on the number of rational points on families of genus 2 curves.

Keywords : Heights, Abelian varieties, Torsion points, Rational points.
Mathematics Subject Classification : 11G50, 14G40, 14G05, 11G30, 11G10.

1. La conjecture de Lang et Silverman

1.1. **Présentation.** Soit k un corps de nombres de degré d sur $\mathbb{Q}$. Dans tout le texte on note M_k l'ensemble de ses places (deux à deux non équivalentes), M_k^∞ l'ensemble de ses places archimédiennes et M_k^0 l'ensemble de ses places finies. Pour toute place v de k on note k_v le complété de k pour la valuation $|.|_v$ associée où on normalise $|p|_v = p^{-1}$ pour toute place finie v au-dessus d'un nombre premier p. On pose $d_v = [k_v : \mathbb{Q}_v]$ et $n_v = d_v/d$.

On va s'intéresser à une question figurant dans le livre de S. Lang [18] page 92 et qui concerne la minoration de la hauteur de Néron-Tate d'un point rationnel d'ordre infini sur une courbe elliptique. Cette question a été la source d'un grand nombre de travaux et de généralisations en géométrie diophantienne. On peut la formuler de la manière suivante :

Conjecture 1.1. *(Lang) Pour tout corps de nombres k, il existe une constante positive $c(k)$ telle que pour toute courbe elliptique E définie sur k et tout point P d'ordre infini de $E(k)$ on ait :*

$$\widehat{h}(P) \geq c(k)\, \max\Big\{ \log \mathrm{N}_{k/\mathbb{Q}}(\Delta_E), h(j_E) \Big\},$$

où $\widehat{h}(.)$ est la hauteur de Néron-Tate sur E, $\mathrm{N}_{k/\mathbb{Q}}(\Delta_E)$ la norme du disciminant minimal de la courbe E et $h(j_E)$ la hauteur de Weil logarithmique et absolue de l'invariant modulaire j_E de la courbe E.

On trouve des résultats en direction de cet énoncé dans les travaux de J. Silverman [32] et [33], M. Hindry et J. Silverman dans [14] et de S. David dans [4]. Citons aussi M. Krir [17] et C. Petsche [29]. M. Hindry et J. Silverman obtiennent dans [14], corollaire 4.2 (ii) de leur théorème 4.1 (page 430 et 431), le résultat suivant :

Théorème 1.2. *(Hindry, Silverman) Soit k un corps de nombres de degré d. Soit E/k une courbe elliptique de disciminant minimal Δ_E et de conducteur F_E. On note σ_E le quotient de Szpiro défini par $\sigma_E = \log \mathrm{N}_{k/\mathbb{Q}}(\Delta_E)/\log \mathrm{N}_{k/\mathbb{Q}}(F_E)$. Alors pour tout point $P \in E(k)$ d'ordre infini on a la minoration :*

$$\widehat{h}(P) \geq (20\sigma_E)^{-8d} 10^{-4\sigma_E} \frac{1}{12} \max\Big\{ \log \mathrm{N}_{k/\mathbb{Q}}(\Delta_E), h(j_E)\Big\}.$$

Une conjecture de Szpiro, équivalente à une forme de la conjecture ABC, affirme que σ_E est uniformément borné et entraîne donc la conjecture de Lang via ce théorème de Hindry et Silverman. La conjecture sur les courbes elliptiques a ensuite été généralisée aux variétés abéliennes de dimension supérieure par J. Silverman dans [33] page 396 :

Conjecture 1.3. *(Lang, Silverman) Soit $g \geq 1$. Pour tout corps de nombres k, il existe une constante positive $c(k,g)$ telle que pour toute variété abélienne A/k de dimension g, pour tout diviseur ample et symétrique $\mathcal{D} \in \mathrm{Div}(A)$ et tout point $P \in A(k)$ tel que $\mathbb{Z}{\cdot}P = \{mP | m \in \mathbb{Z}\}$ est Zariski-dense on ait :*

$$\widehat{h}_{A,\mathcal{D}}(P) \geq c(k,g)\, \max\Big\{1, h_{\mathrm{F}}(A/k)\Big\},$$

où $\widehat{h}_{A,\mathcal{D}}(.)$ est la hauteur de Néron-Tate sur A associée au diviseur $\mathcal{D}$ et $h_{\mathrm{F}}(A/k)$ est la hauteur de Faltings (relative) de la variété abélienne A.

Remarque 1.4. Il y a plusieurs notions de hauteur d'une variété abélienne A. L'énoncé de cette conjecture est plus fin avec la hauteur de Faltings *relative* $h_{\mathrm{F}}(A/k)$ comme minorant qu'avec la hauteur de Faltings *stable* $h_{\mathrm{st}}(A)$. Rappelons de plus que la hauteur de Faltings stable est comparable à une hauteur modulaire (voir [8], [6] ou [28]), comme par exemple la hauteur thêta $h_\Theta(A)$, vérifiant $|\, h_{\mathrm{F}}(A) - 2h_\Theta(A)| \ll \log h_\Theta(A)$. Dans ce texte on utilisera aussi la hauteur de Faltings modifée relative (définie plus bas par la formule (3), voir aussi [28]) notée $h'_{\mathrm{F}}(A/k)$, et son avatar stable notée $h'_{\mathrm{st}}(A)$, qui vérifie $|\, h'_{\mathrm{st}}(A) - 2h_\Theta(A)| \ll 1$.

S. David a proposé dans [5] une preuve partielle de cette conjecture généralisée, preuve basée sur un raisonnement de type transcendance : il donne une borne inférieure pouvant tendre vers l'infini avec la hauteur thêta de la variété.

Théorème 1.5. *(David) Soient $g \geq 1$ un entier, k un corps de nombres, v une place archimédienne, $(A, \mathcal{D})/k$ une variété abélienne principalement polarisée de dimension g et τ_v une matrice du domaine de Siegel (voir paragraphe 1.3) telle que $A(\bar{k}_v) \cong \mathbb{C}^g/\mathbb{Z}^g + \tau_v\mathbb{Z}^g$. On note $\| \operatorname{Im} \tau_v \| = \max_{i,j} |\operatorname{Im} \tau_{v,ij}|$. Posons : $\rho(A) = h_\Theta(A)/ \| \operatorname{Im}\tau_v \|$.*

Alors il existe une constante $c_1(k,g) > 0$ telle que, tout point $P \in A(k)$ vérifiant que $\mathbb{Z}.P$ est Zariski-dense, on a :

$$\widehat{h}_{A,\mathcal{D}}(P) \geq c_1(k,g)\rho(A)^{-4g-2}\Big(\log \rho(A)\Big)^{-4g-1} h_\Theta(A).$$

Cet énoncé implique donc l'inégalité cherchée (sur un corps où la réduction est semi-stable) pour les familles de variétés abéliennes vérifiant $\rho(A,k)$ borné. D. Masser utilise d'ailleurs ces résultats dans [22] pour exhiber une famille de variétés abéliennes simples avec ρ borné uniformément.

En application, on donnera des résultats en direction de deux conjectures classiques dont on rappelle les énoncés ici :

Conjecture 1.6. *(de torsion forte) Soient k un corps de nombres de degré d et $g \geq 1$ un entier. Alors il existe une constante $c(k,g) > 0$ ne dépendant que de k et g telle que pour toute variété abélienne A de dimension g définie sur k on a :*

$$\operatorname{Card} A(k)_{\text{tors}} \leq c(k,g).$$

Conjecture 1.7. *(points rationnels) Soient k un corps de nombres de degré d et $g \geq 2$ un entier. Alors il existe une constante $c(k,g) > 0$ ne dépendant que de k et g telle que pour toute courbe C de genre g définie sur k on a :*

$$\operatorname{Card} C(k) \leq c(k,g)^{\operatorname{rang}_k(\operatorname{Jac}(C))+1},$$

où $\operatorname{Jac}(C)$ *désigne la variété jacobienne de C.*

1.2. **Résultats.** Une variété abélienne principalement polarisée de dimension 2 est isomorphe ou bien à une jacobienne d'une courbe C de genre 2 polarisée par le diviseur $\Theta = C$, ou bien à un produit de courbes elliptiques $E_1 \times E_2$, polarisé par $\Theta = E_1 \times \{O\} + \{O\} \times E_2$.

On obtient dans cet article un théorème de minoration de la hauteur de Néron-Tate associée au diviseur Θ en utilisant une technique de décomposition en hauteurs locales légèrement modifiée. En effet ces hauteurs locales sont définies à une constante près, il y a donc plusieurs manières de normaliser ces fonctions. On met en place une étude des différences de hauteurs locales (c'est une manière détournée de fixer une normalisation) grâce à une propriété cruciale des points de 3-torsion en dimension 2.

La méthode de décomposition locale et l'étude des séries thêta associées fait apparaître une condition nécessaire dans l'espace de modules des variétés abéliennes principalement polarisées de dimension 2. Le phénomène de rupture d'une variété abélienne simple en produit de courbes elliptiques entraîne une explosion des composantes locales, tant au niveau de la minoration de la hauteur de Néron-Tate que de la majoration de la hauteur de Faltings. On va donc introduire une quantité appelée *simplicité archimédienne* chargée de mesurer la distance au produit de courbes elliptiques.

Pour une surface abélienne principalement polarisée A/k avec k un corps de nombres et v une place infinie, on peut uniformiser les points complexes $A(\bar{k}_v) \cong \mathbb{C}^2/\mathbb{Z}^2 + \tau_v\mathbb{Z}^2$ avec $\tau_v = \begin{bmatrix} \tau_{1,v} & \tau_{12,v} \\ \tau_{12,v} & \tau_{2,v} \end{bmatrix}$ dans le domaine de Siegel F_2 (voir paragraphe 1.3). Dans cette uniformisation les produits de courbes elliptiques correspondent exactement au lieu $(\tau_{12} = 0)$ dans l'ensemble F_2. On appelle alors *simplicité archimédienne* le produit :

$$\mathrm{s}_\infty(A) = \prod_{v \in M_k^\infty} |\tau_{12,v}|^{d_v}. \tag{1}$$

Il est donc aisé de voir que $\mathrm{s}_\infty(A) = 0$ si et seulement si A est un produit de courbes elliptiques. On appelle de plus *trace archimédienne* de A la quantité :

$$\operatorname{Tr}_\infty(A) = \sum_{v \in M_k^\infty} d_v \operatorname{Tr}(\operatorname{Im} \tau_v). \tag{2}$$

On note $D = 2^8 \operatorname{disc}(F)$ le discriminant de norme minimale d'un modèle hyperelliptique entier $y^2 = F(x)$ de la courbe sous-jacente. Notons de plus que les calculs explicites et la mise en œuvre des estimations des hauteurs locales aux places finies est basée sur l'étude poussée de la surface de Kummer effectuée par V. Flynn, N. Smart et M. Stoll dans les articles [9, 10, 36, 37]. Dans le cas des jacobiennes de dimension 2 simples, le théorème prend la forme suivante :

Théorème 1.8. *(Version A.) Soit k un corps de nombres de degré d. Soient C/k une courbe de genre 2 admettant un point de Weierstrass rationnel sur k et A sa jacobienne. Alors si A est géométriquement simple, il existe une constante $c_1(d) > 0$ telle que pour tout point $P \in A(k)$ l'une des deux propositions suivantes est vraie :*

(i) $[n]P = O$ *pour un entier* $1 \leq n \leq 2 \cdot 10087^{4 \cdot 3^{16} d}$,

(ii) $\widehat{h}_{A,2\Theta}(P) \geq c_1 \left(\mathrm{Tr}_\infty(A) - \dfrac{5}{3} \log \dfrac{\mathrm{N}_{k/\mathbb{Q}}(D)}{s_\infty(A)} \right)$,

où on peut prendre $c_1 = 0,03/\left(d\, 10087^{8 \cdot 3^{16} d}\right)$.

(Version B.) Soit k un corps de nombres de degré d. Soient C/k une courbe de genre 2 admettant un point de Weierstrass rationnel sur k et A sa jacobienne. Alors si A est géométriquement simple, il existe une constante $c_2(d, A) > 0$ telle que pour tout point $P \in A(k)$ l'une des deux propositions suivantes est vraie :

(i) $[n]P = O$ *pour un entier* $1 \leq n \leq 2 \cdot 10087^{4 \cdot 3^{16} d} \left(\dfrac{\mathrm{N}_{k/\mathbb{Q}}(D)}{s_\infty(A)} \right)^{10/3}$,

(ii) $\widehat{h}_{A,2\Theta}(P) \geq c_2\ \mathrm{Tr}_\infty(A)$,

où on peut prendre $c_2 = 0,03/\left(d\, 10087^{8 \cdot 3^{16} d}\, \mathrm{N}_{k/\mathbb{Q}}(D)^{20/3} s_\infty(A)^{-20/3}\right)$.

Remarque 1.9. Un modèle hyperelliptique entier d'une courbe de genre 2 ne vérifie pas nécessairement l'inégalité $\mathrm{Tr}_\infty(A) > \frac{5}{3} \log \frac{\mathrm{N}_{k/\mathbb{Q}}(D)}{s_\infty(A)}$. On peut trouver des exemples parmi les courbes CM (*i.e.* admettant des multiplications complexes), quitte à prendre une extension de corps. On sait par densité des points CM dans F_2 qu'il en existe une infinité telle que les jacobiennes associées A vérifient $\mathrm{Tr}_\infty(A) + \frac{5}{3}\log(s_\infty(A)) > 0$. On sait de plus que les variétés abéliennes CM ont potentiellement bonne réduction partout. On montre alors dans le courant de la preuve du corollaire 1.15 (qui se trouve juste après l'énoncé du corollaire 8.3) qu'après une extension du corps k de degré uniformément borné, on peut choisir un modèle hyperelliptique avec discriminant minimal global trivial.

Exemple 1.10. Prenons par exemple $A = \mathrm{Jac}(C)$ où C est la courbe donnée par le modèle affine $y^2 = x^5 + x$. On sait calculer la matrice de périodes en MAGMA, qui fournit en valeur approchée $\mathrm{Tr}_\infty(A) \simeq 1,88$ et $\log|s_\infty(A)| \simeq -0,75$, donc $\mathrm{Tr}_\infty(A) + \frac{5}{3}\log(s_\infty(A)) \simeq 0,63 > 0$. De plus, C est une courbe CM (on regarde le morphisme $(x, y) \to (\zeta^2 x, \zeta y)$ où ζ est une racine primitive huitième de l'unité). Sa jacobienne hérite donc de la structure CM et est en particulier potentiellement à bonne réduction partout.

Remarque 1.11. L'existence d'un point de Weierstrass rationnel sur k est équivalente à l'existence d'un modèle $y^2 = F(x)$ avec $\deg(F) = 5$ sur k plus une propriété de symétrie du diviseur Θ.

On déduit immédiatement de ce théorème le corollaire suivant :

Corollaire 1.12. *Soit k un corps de nombres de degré d. Soient C/k une courbe de genre 2 de modèle entier $y^2 = F(x)$ avec $\deg(F) = 5$ et A/k sa jacobienne, géométriquement simple. Soient $\mathrm{Tr}_\infty(A)$ sa trace archimédienne, $s_\infty(A)$ sa simplicité archimédienne et $D = 2^8 \operatorname{disc}(F)$. On suppose que :*

$$\mathrm{Tr}_\infty(A) > \frac{5}{3} \log \frac{\mathrm{N}_{k/\mathbb{Q}}(D)}{s_\infty(A)}.$$

Alors on a :

$$\operatorname{Card}\Big(A(k)_{\mathrm{tors}}\Big) \leq 2^4 \cdot 10087^{16\cdot 3^{16} d}.$$

On complète le théorème 1.8 par l'étude de la situation du produit de courbes elliptiques, qui donne un théorème plus faible que celui de M. Hindry et J. Silverman dans [14], mais qui permet d'aboutir à un énoncé faisant intervenir les mêmes quantités que pour les jacobiennes simples. Introduisons de plus la quantité $h'_{\mathrm{F}}(A/k)$, la *hauteur de Faltings modifiée* d'une variété abélienne principalement polarisée :

$$h'_{\mathrm{F}}(A/k) = h_{\mathrm{F}}(A/k) + \frac{1}{2d} \sum_{v \in M_k^\infty} d_v \log[\det(\operatorname{Im} \tau_v)]. \tag{3}$$

On donne alors la preuve du théorème de majoration suivant, basé sur l'expression de la hauteur de Faltings donnée dans [38] :

Théorème 1.13. *Soit k un corps de nombres de degré d. Soit C/k une courbe de genre 2 avec bonne réduction en 2, prise dans un modèle hyperelliptique entier $y^2 = F(x)$ avec $\deg(F) = 5$. On note $D = 2^8 \operatorname{disc}(F)$. On suppose que la jacobienne $A = \operatorname{Jac}(C)$ est géométriquement simple. Alors il existe des constantes $c_3(d) > 0$ et $c_4(d) > 0$ telles que :*

$$h'_{\mathrm{F}}(A/k) \leq c_3 \,\mathrm{Tr}_\infty(A) + c_4 \log \frac{\mathrm{N}_{k/\mathbb{Q}}(D)}{s_\infty(A)},$$

et on peut prendre : $c_3 = \frac{6\pi}{10d}$ et $c_4 = \frac{1}{10d}$.

Notons que ce théorème est un pas vers la conjecture 1.7 de S. David donnée dans [5] page 513. La conjonction des théorèmes 1.8 et 1.13 fournit alors le corollaire suivant, dans lequel on fixe : si $A = \operatorname{Jac}(C)$ est la jacobienne d'une courbe de genre 2, avec C donnée par un modèle minimal entier $y^2 = F(x)$ avec $\deg(F) = 5$, on note $D = 2^8 \operatorname{disc}(F)$. Si $A = E_1 \times E_2$ est un produit de courbes elliptiques, on note $D = \Delta_{E_1}\Delta_{E_2}$ le produit des discriminants minimaux de E_1 et E_2.

Corollaire 1.14. *Soit k un corps de nombres de degré d et $\varepsilon > 0$. Soit $(A, \Theta)/k$ une variété abélienne principalement polarisée de dimension 2. Si A est simple, on suppose que $\mathrm{Tr}_\infty(A) \geq (5/3 + \varepsilon) \log(\mathrm{N}_{k/\mathbb{Q}}(D)/s_\infty(A))$. Sinon on suppose $\mathrm{Tr}_\infty(A) \geq (5/36 + \varepsilon) \log \mathrm{N}_{k/\mathbb{Q}}(D)$. Alors il existe une constante $c(d, \varepsilon) > 0$ telle que pour tout point $P \in A(k)$ vérifiant $\overline{\mathbb{Z}\cdot P} = A$ on a :*

$$\widehat{h}_{A,2\Theta}(P) \geq c\, h'_{\mathrm{F}}(A/k),$$

et on peut prendre $c = 0,015\frac{\varepsilon}{2+\varepsilon} \cdot 10087^{-8\cdot 3^{16} d}$.

Les théorèmes 1 et 2, ainsi que ce corollaire, permettent de vérifier la conjecture de Lang et Silverman pour une large classe de variétés abéliennes de dimension 2, par exemple les jacobiennes simples, de simplicité minorée, qui ont potentiellement bonne réduction partout :

Corollaire 1.15. *Soit k un corps de nombres de degré d. Soit C/k une courbe de genre 2 donnée dans un modèle hyperelliptique entier $y^2 = F(x)$ avec $\deg(F) = 5$ et telle que C/k a potentiellement bonne réduction partout. Soit A la jacobienne de C, géométriquement simple, de simplicité archimédienne supérieure à 1. Alors il existe une constante $c(d) > 0$ telle que pour tout point $P \in A(k)$ d'ordre infini on a :*

$$\widehat{h}_{A,2\Theta}(P) \geq c\, h'_{\mathrm{st}}(A),$$

et on peut prendre $c = \frac{1}{20\pi} \cdot 10087^{-320 \cdot 15^{16} d}$.

Cet énoncé n'est pas couvert par le théorème de S. David [5] en dimension 2. Par contre le théorème de S. David se passe de l'hypothèse archimédienne dont on a besoin pour mener à bien la stratégie locale.

On rajoute un dernier énoncé concernant les points rationnels sur les courbes de genre 2 :

Corollaire 1.16. *Soit k un corps de nombres et $\varepsilon > 0$. Soit C/k une courbe de genre 2, avec bonne réduction en toute place divisant 2, donnée dans un modèle entier $y^2 = F(x)$ avec $\deg(F) = 5$. On notera $D = 2^8 \operatorname{disc}(F)$. Soit A/k la jacobienne de C. On suppose que $\mathrm{Tr}_\infty(A) \geq (5/3 + \varepsilon) \log(\mathrm{N}_{k/\mathbb{Q}}(D)/\, \mathrm{s}_\infty(A))$. Alors il existe une constante $c_2(d, \varepsilon) > 0$ ne dépendant que de $d = [k : \mathbb{Q}]$ et ε telle que :*

$$\mathrm{Card}(C(k)) \leq c_2^{\operatorname{rang} A(k)+1},$$

et on peut choisir :

$$c_2 = 10087^{(d+1)2^{35}\left(1+\frac{2}{\varepsilon}\right)}.$$

1.3. **Domaine archimédien.** Nous allons mettre en place une stratégie de minoration proche de celle adoptée par M. Hindry et J. Silverman dans le cas $g = 1$ en utilisant la décomposition de la hauteur de Néron-Tate en hauteurs locales. Ce qui rend cette démarche possible en dimension 1 est l'existence de formules explicites et relativement manipulables pour ces hauteurs locales. Bien qu'on ne dispose pas de formule dans le cas général, on peut encore obtenir un énoncé en dimension 2.

Commençons par fixer le domaine de Siegel : soit v une place archimédienne du corps k. On notera H_g l'espace de Siegel associé aux variétés abéliennes sur $\bar{k}_v$ principalement polarisées de dimension g et munies d'une base symplectique (on pourra consulter [19] page 213). C'est l'ensemble des matrices $\tau = \tau_v$ de taille $g \times g$ symétriques à coefficients complexes et vérifiant la condition $\operatorname{Im} \tau > 0$ (i.e. définie positive). Cet espace est muni d'une action transitive du groupe symplectique $\Gamma = \mathrm{Sp}(2g, \mathbb{R})$ donnée par :

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \cdot \tau = (A\tau + B)(C\tau + D)^{-1}.$$

On considère alors F_g un domaine fondamental pour l'action du sous-groupe $\mathrm{Sp}(2g, \mathbb{Z})$. On peut choisir F_g de telle sorte qu'une matrice τ de ce domaine vérifie en particulier les conditions suivantes (voir [11] page 34) :

- S1 : Pour tout $\sigma \in \mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{Z})$ on a : $\det(\mathrm{Im}(\sigma.\tau)) \leq \det(\mathrm{Im}(\tau))$. On dira que $\operatorname{Im} \tau$ est *maximale* pour l'action de $\mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{Z})$.
- S2 : Si $\mathrm{Re}(\tau) = (a_{i,j})$ alors $|a_{i,j}| \leq \frac{1}{2}$.
- S3 : Si $\mathrm{Im}(\tau) = (b_{i,j})$ alors pour tout $l \in \{1, ..., g\}$ et tout $\zeta = (\zeta_1, ..., \zeta_g) \in \mathbb{Z}^g$ tel que $\mathrm{pgcd}(\zeta_1, ..., \zeta_l) = 1$ on a ${}^t\zeta \,\mathrm{Im}(\tau) \zeta \geq b_{l,l}$. De plus pour tout $i \in \{1, ..., g\}$ on a $b_{i,i+1} \geq 0$. On impose enfin $b_{g,g} \geq ... \geq b_{1,1} \geq \sqrt{3}/2$ et $b_{i,i}/2 \geq |b_{i,j}|$.

En dimension $g=2$ on aura en particulier les inégalités, utilisées constamment dans le texte (on note $\tau_1=\tau_{11}$ et $\tau_2=\tau_{22}$) :

$$\left\{\begin{array}{l}\operatorname{Im}\tau_2\geq\operatorname{Im}\tau_1\geq 2\operatorname{Im}\tau_{12}\geq 0,\\ \operatorname{Im}\tau_1\geq\frac{\sqrt{3}}{2}.\end{array}\right.\tag{4}$$

Dans tout le texte, les matrices τ seront toujours supposées appartenir au domaine fondamental F_2. On imposera de plus qu'elles soient de trace maximale.

Dans la partie 2, suivant directement cette introduction, on décompose la hauteur de Néron-Tate en hauteurs locales explicites. On s'inspire pour cela l'article de E. V. Flynn et N. P. Smart [10]. On minore alors les hauteurs locales aux places finies en utilisant les résultats de M. Stoll de l'article [36]. La troisième partie donne une autre définition de hauteur locale aux places archimédiennes. On réunit les deux normalisations dans la quatrième. Après avoir effectué ces minorations place par place, on réunit ces informations dans une cinquième partie pour obtenir une minoration globale. On propose dans la sixième partie une majoration de la hauteur de Faltings de la jacobienne d'une courbe de genre 2. La septième partie regroupe des travaux parallèles sur les produits de courbes elliptiques. Enfin, on réunit les résultats des parties 5, 6 et 7 dans une huitième partie regroupant trois corollaires : une minoration de la hauteur de Néron-Tate par la hauteur de Faltings, une borne sur la torsion des variétés abéliennes de dimension 2 et une borne sur le nombre de points rationnels d'une courbe de genre 2.

Terminons cette introduction en redonnant brièvement l'argument permettant de déduire la structure des variétés abéliennes de dimension 2 principalement polarisées. Soit (A,Θ) une telle variété. On a $\dim(\Theta)=1$ et $(\Theta)^{(2)}=2!=2$ (par Riemann-Roch, ou bien la formule de Poincaré [19] page 328). Si Θ est une courbe C et $j:C\hookrightarrow \mathrm{Jac}(C)$ le plongement dans la jacobienne, on montre que $j(C)+j(C)$ est birationnellement équivalent à A, ce qui n'est possible que si C est de genre 2 et $A\simeq\mathrm{Jac}(C)$. Si $\Theta=\sum C_i$ avec C_i des courbes, on a :

$$2=(\Theta)^{(2)}=\sum(C_i\cdot C_j),$$

et chaque terme de la somme est un entier naturel. On déduit alors que Θ est isomorphe à la somme de deux courbes, qui de plus sont des translatées de sous-variétés abéliennes de A.

Remerciements. Merci à M. Hindry, G. Rémond et J. Silverman pour leurs encouragements et leur intérêt pour ce travail.

2. Les hauteurs locales en dimension 2

L'existence de la décomposition en hauteurs locales fait l'objet du théorème suivant :

Théorème 2.1. *(Néron) Soit A/k une variété abélienne définie sur un corps de nombres k. Soit M_k l'ensemble des places de k. Pour tout diviseur $\mathcal{D}$ sur A on note $A_{\mathcal{D}}=A\setminus\mathrm{supp}(\mathcal{D})$. Alors pour toute place $v\in M_k$ il existe une fonction hauteur locale, unique à une fonction constante près :*

$$\widehat{\lambda}_{\mathcal{D},v}:A_{\mathcal{D}}(k_v)\longrightarrow\mathbb{R},$$

appelée hauteur locale canonique, dépendant du choix de $\mathcal{D}$ et vérifiant les propriétés suivantes, avec $\gamma_{i,v}$ des constantes dépendant de v :

(i) $\widehat{\lambda}_{\mathcal{D}_1+\mathcal{D}_2,v}=\widehat{\lambda}_{\mathcal{D}_1,v}+\widehat{\lambda}_{\mathcal{D}_2,v}+\gamma_{1,v}$.

(ii) *Si* $\mathcal{D} = \mathrm{div}(f)$*, alors* $\widehat{\lambda}_{\mathcal{D},v} = v \circ f + \gamma_{2,v}$.

(iii) *Si* $\Phi : B \to A$ *est un morphisme de variétés abéliennes alors on a la relation :* $\widehat{\lambda}_{\Phi^*\mathcal{D},v} = \widehat{\lambda}_{\mathcal{D},v} \circ \Phi + \gamma_{3,v}$.

(iv) *Soit* $Q \in A(k)$ *et soit* $t_Q : A \to A$ *la translation par* Q*. Alors on a la relation :* $\widehat{\lambda}_{t_Q^*\mathcal{D},v} = \widehat{\lambda}_{\mathcal{D},v} \circ t_Q + \gamma_{4,v}$.

(v) *Soit* $\widehat{h}_{A,\mathcal{D}}$ *la hauteur globale canonique de* A *associée à* $\mathcal{D}$*. Il existe une constante* c *telle que, pour tout* $P \in A_{\mathcal{D}}(k)$ *:*

$$\widehat{h}_{A,\mathcal{D}}(P) = \sum_{v \in M_k} n_v \widehat{\lambda}_{\mathcal{D},v}(P) + c.$$

(vi) *Si* $\mathcal{D}$ *vérifie* $[2]^*\mathcal{D} = 4\mathcal{D} + \mathrm{div}(f)$ *pour* f *une fonction rationnelle sur* A *et si l'on fixe les constantes de telle sorte qu'on ait la relation* $\widehat{\lambda}_{\mathcal{D},v}([2]P) = 4\widehat{\lambda}_{\mathcal{D},v}(P) + v(f(P))$*, alors :*

$$\widehat{h}_{A,\mathcal{D}}(P) = \sum_{v \in M_k} n_v \widehat{\lambda}_{\mathcal{D},v}(P).$$

(Notons que f *est unique à multiplication par une constante* $a \in k^*$ *près.)*

Les deux premiers paragraphes sont directement issus de l'article de E.V. Flynn et N. Smart [10]. On en donne ici une reformulation un peu plus géométrique en omettant la plupart des preuves. Remarquons que l'article original [10] est écrit pour $k = \mathbb{Q}$, mais on peut tout utiliser, *mutatis mutandis*, sur un corps de nombres k. Ceci est en fait décrit dans les articles de M. Stoll [36] et [37].

2.1. **Jacobienne et surface de Kummer.** On se donne une courbe C de genre 2 sur un corps de nombres k. On sait que C est hyperelliptique, elle possède donc six *points de Weierstrass*, les points fixes de l'involution hyperelliptique. On fait l'hypothèse que l'un de ces points, appelé P_0, est rationnel sur k. On note cl pour la classe rationnelle d'un diviseur. On définit alors le plongement jacobien de la courbe C dans sa jacobienne :

$$j : C \hookrightarrow \mathrm{Jac}(C)$$
$$P \mapsto \mathrm{cl}\Big((P) - (P_0)\Big).$$

On définit alors $\Theta = j(C)$.

Remarque 2.2. Ce choix de P_0 permet d'affirmer que : $P \in \Theta \iff -P \in \Theta$.

E.V. Flynn et N. Smart explicitent dans l'article [10] un choix possible des fonctions hauteurs locales lorsque A est la jacobienne d'une courbe de genre 2. Nous suivrons pour cela leur normalisation pour les hauteurs locales. Le diviseur qu'ils utilisent est $\mathcal{D} = 2\Theta$ lorsque le modèle hyperelliptique est de degré 5. Soulignons que ce choix de diviseur est unique à translation par un point de 2-torsion près.

Soient k un corps de nombres et C/k une courbe de genre 2. On peut identifier la jacobienne $\mathrm{Jac}(C)$ au carré symétrique de la courbe, $\mathrm{Sym}^2(C)$, dans lequel il faut contracter un diviseur (qui correspond au diviseur exceptionnel d'un éclatement d'un point de $\mathrm{Jac}(C)$). Ce procédé est bien décrit dans [25] page 52. La surface de Kummer K est définie comme le quotient $\mathrm{Jac}(C)/(\pm 1)$. Elle se plonge dans $\mathbb{P}^3$. On a le diagramme :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Sym}^2(C) \arrow[r, "\kappa"] \arrow[d, "\pi"'] & K \subset \mathbb{P}^3 \\ \mathrm{Jac}(C) \arrow[ur, "\kappa_{2\Theta}"'] & \end{tikzcd}$$

Voyons cela plus en détails : comme on a supposé que P_0 est un point de Weierstrass rationnel sur k, on peut se donner un modèle hyperelliptique de la courbe C entier sur k de degré impair, avec $a_5 \neq 0$ et sans racine multiple :

$$C : y^2 = F(x) = a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0.$$

Contrairement au modèle plus général de degré 6, il n'y a dans ce modèle qu'un point à l'infini : $P_0 = \infty$. L'étude de [10] est menée en degré 6, le cas quintique est plus simple et inclus dans leur travail (il suffit de spécialiser $f_6 = 0$ dans leur notation).

On note $A = \mathrm{Jac}(C)$ la jacobienne de C. L'involution hyperelliptique donnée sur la courbe C par $i : (x, y) \to (x, -y)$ induit la multiplication par $[-1]$ sur A. On considère le quotient de A par (± 1). La surface K est donnée par l'équation quartique homogène suivante (donnée dans [9] ou [2] page 19 et reprise dans l'annexe de [27]) :

$$R(k_1, k_2, k_3)k_4^2 + S(k_1, k_2, k_3)k_4 + T(k_1, k_2, k_3) = 0.$$

On peut donner les points de K par l'application :

$$\kappa : \mathrm{Sym}^2(C) \longrightarrow K \subset \mathbb{P}^3$$

$$\kappa : P = (P_1, P_2) \longmapsto K_P = (k_1, k_2, k_3, k_4),$$

où on a défini pour un point $P = ((x_1, y_1), (x_2, y_2))$ hors du support du diviseur Θ :

$$\begin{cases} k_1 = 1, \\ k_2 = x_1 + x_2, \\ k_3 = x_1x_2, \\ k_4 = \begin{pmatrix} 2a_0 + a_1(x_1 + x_2) + 2a_2x_1x_2 + a_3(x_1^2x_2 + x_1x_2^2) \\ +2a_4x_1^2x_2^2 + a_5(x_1^3x_2^2 + x_1^2x_2^3) - 2y_1y_2 \end{pmatrix} /(x_1 - x_2)^2 \end{cases}$$

Pour un point $P = ((x_1, y_1), \infty)$: $k_1 = 0, \quad k_2 = 1, \quad k_3 = x_1, \quad k_4 = a_5x_1^2$. Le diviseur $\mathcal{D}'$ sur $\mathrm{Sym}^2(C)$ associé à $(k_1 = 0)$ est donné par $\mathcal{D}' = 2(C \times \{\infty\})$. Ce diviseur $\mathcal{D}'$ s'envoie donc *via* l'application $\pi : \mathrm{Sym}^2(C) \to \mathrm{Jac}(C)$ sur le diviseur $\mathcal{D} = 2\Theta$.

Choisissons alors un plongement $k \hookrightarrow_v \mathbb{C}$. Les points complexes de $(\mathrm{Jac}(C), \Theta)$ forment un tore complexe qu'on normalise ainsi : $\mathrm{Jac}(C)(\mathbb{C}) \simeq A_{\tau_v}(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^2/\mathbb{Z}^2 + \tau_v\mathbb{Z}^2$, avec τ_v une matrice obtenue en calculant les périodes de la surface de Riemann compacte $C(\mathbb{C})$. Le diviseur $\Theta(\mathbb{C})$ est alors identifié à la courbe $C(\mathbb{C}) \hookrightarrow A_{\tau_v}(\mathbb{C})$.

2.2. **Hauteurs.** On garde le cadre précédent et on définit suivant [10] les hauteurs naïve et canonique d'un point $P = (P_1, P_2) \in A(k)$. On va normaliser le point projectif K_P en fixant la première coordonnée non nulle comme étant égale à 1 (c'est la normalisation choisie dans [10]). On peut donc définir la hauteur naïve comme étant :

$$h_K(P) = h(K_P) = \sum_{v \in M_k} n_v \log \max_{i \in \{1,..,4\}} (|k_i|_v),$$

et la hauteur canonique associée :

$$\widehat{h}_{A,2\Theta}(P) = \lim_{n\to+\infty} \frac{h(K_{[2^n]P})}{4^n},$$

où on note $K_{[2^n]P}$ l'image sur la surface de Kummer de la multiplication par $[2^n]$ d'un point P de la jacobienne ; la surface de Kummer n'a plus la structure de groupe de la jacobienne, mais on peut passer l'application au quotient :

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{[2^n]} & A \\ \downarrow & & \downarrow \\ A/(\pm 1) & \longrightarrow & A/(\pm 1) \end{array}$$

On a choisi de travailler avec la multiplication par [2]. En effet il existe des formules explicites de duplication sur la surface de Kummer : prenons un point K_P, alors la formule de duplication est donnée par des polynômes homogènes explicites (donnés sur le site internet de V. Flynn et reproduites en annexe de [27]) notés $\delta(K_P) = (\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4)$ de degré total 4 en les k_i. Avec la normalisation choisie ici, on aura donc (lorsque P et $[2]P$ sont hors du support du diviseur Θ) :

$$K_{[2]P} = \frac{\delta(K_P)}{\delta_1(K_P)}.$$

La hauteur locale naïve en une place v est définie par :

$$\lambda_{2\Theta,v} : (k_1, k_2, k_3, k_4) \longmapsto \log \max_{i\in\{1,..,4\}} (|k_i|_v).$$

Remarque 2.3. Cette construction doit être vue comme l'analogue de la hauteur locale sur une courbe elliptique $\lambda_v(P) = \log|x(P)|_v$, où $x(P)$ est la coordonnée d'un point P dans un modèle de Weierstrass.

Calculons alors :

$$\begin{aligned} \lambda_{2\Theta,v}(K_{[2]P}) - 4\lambda_{2\Theta,v}(K_P) &= \log \frac{\max_{i\in\{1,..,4\}}(|k_i([2]P)|_v)}{\max_{i\in\{1,..,4\}}(|k_i(P)|_v^4)} \\ &= -\log|\delta_1(K_P)|_v + \log \frac{\max_{i\in\{1,..,4\}}(|\delta_i(K_P)|_v)}{\max_{i\in\{1,..,4\}}(|k_i(P)|_v^4)}. \end{aligned}$$

Toujours en suivant [10] on définit la hauteur locale canonique d'un point $P \in A_{2\Theta}(k)$ comme suit, en posant tout d'abord :

$$E_v(K_P) := \frac{\max(|\delta_i(K_P)|_v)}{\max(|k_i(P)|_v^4)}$$

et :

$$\mu_{2\Theta,v}(K_P) := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{4^{n+1}} \log\Big(E_v(K_{[2^n]P})\Big).$$

Remarque 2.4. Cette quantité $\mu_{2\Theta,v}(K_P)$ ne dépend pas de la normalisation du point projectif. Il est intéressant de remarquer que la preuve du lemme 3 de [10] utilise une normalisation différente du reste de l'article.

Alors on définit la hauteur locale canonique :

$$\widehat{\lambda}_{2\Theta,v}(P) = \lambda_{2\Theta,v}(K_P) + \mu_{2\Theta,v}(K_P).$$

Lorsque $K_{[2]P}$ est lui aussi hors du support du diviseur 2Θ, cette hauteur locale canonique vérifie l'équation fonctionnelle :

$$\widehat{\lambda}_{2\Theta,v}([2]P) - 4\widehat{\lambda}_{2\Theta,v}(P) = -\log|\delta_1(K_P)|_v = v(f(P)),$$

avec $f(P) := \delta_1(K_P)$ et $\mathrm{div}(f) = [2]^*(2\Theta) - 4(2\Theta)$.

D'après le théorème 4 de l'article [10] (qui ne dépend pas de la normalisation projective choisie pour le point P) on a bien pour $P \in A_\Theta(k)$ (i.e. hors du support du diviseur Θ) :

$$\widehat{h}_{A,2\Theta}(P) = \sum_{v\in M_k} n_v \widehat{\lambda}_{2\Theta,v}(P).$$

3. Une autre hauteur locale archimédienne

On donne dans cette partie une autre normalisation des hauteurs locales archimédiennes, grâce à l'utilisation des fonctions thêta. Ce lien est donné par A. Néron, voir par exemple l'article fondateur [26] page 329.

3.1. **Définition.** On commence ce paragraphe par rappeler la définition des fonctions thêta : soient $Z \in \mathbb{C}^2$ et $\tau \in F_2$:

$$\theta_{a,b}(Z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}^2} e^{2i\pi\left(\frac{1}{2}\,{}^t(n+a)\tau(n+a)+\,{}^t(n+a)(Z+b)\right)},$$

où $a, b \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}^2/\mathbb{Z}^2$ forment le *vecteur caractéristique* de la fonction thêta.

Tout vecteur complexe Z peut se décomposer en $Z = X + \tau Y$ avec $X, Y \in \mathbb{R}^2$.

Le théorème de Riemann (voir par exemple [19] page 330) montre que les points complexes du diviseur Θ sont les zéros d'une fonction thêta avec caractéristique (la caractéristique fixant le point de torsion par lequel il faut éventuellement translater, voir par exemple [25] page 60 et page 69 et [23] page 164).

En se reportant à l'analyse menée dans [23] page 164 et [24] page 3.80-82, on peut identifier le vecteur caractéristique comme étant $[a, b] = [1/2,\ 1/2,\ 1,\ 1/2]$. C'est aussi le choix qui est fait dans [40]. Il est de plus équivalent de prendre la troisième coordonnée égale à zéro.

Fixons alors $[a, b] = [1/2,\ 1/2,\ 0,\ 1/2]$. Cette caractéristique est impaire, la fonction thêta considérée vérifie en particulier $\theta_{a,b}(0) = 0$. Son diviseur est $\Theta(\mathbb{C})$ et il contient O dans son support.

Soit k un corps de nombres. Soient C/k une courbe de genre 2 et $A = \mathrm{Jac}(C)$ sa jacobienne, polarisée par Θ. Soit v une place archimédienne et soit τ_v l'élément de F_2 correspondant à $(A(\bar{k}_v), \Theta)$. On peut alors donner la définition suivante :

Proposition-Définition 3.1. *À une constante près, la hauteur locale associée au diviseur Θ pour la place $v \in M_k$ archimédienne peut s'exprimer comme suit, pour tout point P hors du support du diviseur Θ et toute coordonnée complexe de P notée $Z(P)$:*

$$\Lambda_{\Theta,v}(P) = -\log\left(\left|\theta_{a,b}(Z(P))\right|_v e^{-\pi\,{}^t\mathrm{Im}\,Z(\mathrm{Im}\,\tau_v)^{-1}\mathrm{Im}\,Z}\right).$$

On peut trouver cette idée d'écriture de la hauteur locale dans l'article [26], page 329. Cette fonction est bien une fonction sur le tore, on a corrigé la fonction thêta de telle sorte qu'elle soit $\mathbb{Z}^2 + \tau_v\mathbb{Z}^2$-périodique. Elle vérifie de plus l'équation fonctionnelle :

$$\Lambda_{\Theta,v}([2]P) - 4\Lambda_{\Theta,v}(P) = -\log \frac{|\theta_{a,b}(2Z(P))|_v}{|\theta_{a,b}(Z(P))|_v^4} = v(f(P)),$$

avec $f(P) := \theta_{a,b}([2]P)/\theta_{a,b}(P)^4$ et $\mathrm{div}(f) = [2]^*\Theta - 4\Theta$.

4. Différences de hauteurs locales

On montre dans cette partie comment tirer parti à la fois des informations aux places finies issues de la normalisation des hauteurs locales au sens de Flynn-Smart (donnée dans le paragraphe 2.2) et des calculs menés sur les fonctions thêta.

4.1. **Discussion autour de la torsion.** Rappelons la notation $A_{\mathcal{D}}(k) = A(k)\backslash\mathcal{D}(k)$.

Proposition 4.1. *Soit v une place archimédienne. Soit $\widehat{\lambda}_{2\Theta,v}$ la hauteur locale canonique normalisée au sens de Flynn-Smart et définie dans la partie 2.2. Soit $\Lambda_{\Theta,v}$ la hauteur locale archimédienne définie en 3.1. Il existe une constante $C_{\infty,v}$ telle que :*

$$\forall P \in A_\Theta(k),\ \ \widehat{\lambda}_{2\Theta,v}(P) = 2\Lambda_{\Theta,v}(P) + C_{\infty,v}. \tag{5}$$

Démonstration. C'est en fait un simple corollaire du théorème 2.1. □

Pour obtenir une minoration de la hauteur locale archimédienne normalisée comme dans la partie 2.2, il suffira donc de minorer la hauteur locale archimédienne $\Lambda_{\Theta,v}$ et la constante $C_{\infty,v}$. Nous allons estimer cette constante en particularisant l'équation donnée dans la proposition 4.1 en des points de torsion. Il faut cependant s'assurer que les points ne sont pas sur le support du diviseur Θ.

Nous allons utiliser le fait suivant :

Proposition 4.2. *(Boxall, Grant) Soit* $\mathrm{Jac}(C)/k$ *une jacobienne de dimension 2 sur un corps quelconque, simple et polarisée par le diviseur $\Theta = C$. Alors aucun point d'ordre 3 n'est sur le diviseur Θ.*

Démonstration. Il suffit de consulter la preuve de la proposition 1.5 de [1]. Une deuxième preuve de cette proposition figure en corollaire du lemme de zéros 5.1 du présent texte. □

Remarque 4.3. La situation est complètement différente sur un produit de courbes elliptiques $E_1 \times E_2$ polarisé par $E_1 \times \{O\} + \{P_1\} \times E_2$, où P_1 est un point de 2-torsion non nul. En effet les points de la forme (R, O), avec $3R = O$, sont des points de 3-torsion qui sont sur le diviseur. Quitte à étendre un peu le corps, il y a donc 9 points de 3-torsion sur les produits de courbes elliptiques ainsi polarisés.

Revenons aux variétés abéliennes simples en dimension 2. Nous pouvons nous baser sur la dernière proposition et utiliser les points de 3-torsion dans l'étude de la constante de normalisation des hauteurs locales. En particularisant l'égalité (5) pour R un point de 3-torsion non nul nous obtenons :

$$C_{\infty,v} = \widehat{\lambda}_{2\Theta,v}(R) - 2\Lambda_{\Theta,v}(R),$$

ce qui implique donc que pour tout point $P \in A_\Theta(k)$ et tout point R d'ordre 3 la différence est constante (on n'utilise que le fait que $R \notin \Theta$ pour l'instant) :

$$\widehat{\lambda}_{2\Theta,v}(P) - \widehat{\lambda}_{2\Theta,v}(R) = 2\Lambda_{\Theta,v}(P) - 2\Lambda_{\Theta,v}(R). \tag{6}$$

Posons $\mathcal{T}_3$ l'ensemble des points d'ordre 3. C'est un ensemble de cardinal 80, car il y a 81 points de 3-torsion mais le point O n'est pas d'ordre exactement 3. Nous allons à présent effectuer le calcul clef de notre stratégie d'étude de la hauteur globale. Commençons par des lemmes concernant les points d'ordre 3.

Remarque 4.4. Notons que nous allons supposer ici que $k(A[3]) = k$. Nous verrons à la fin de notre travail comment nous passer de cette hypothèse.

Lemme 4.5. *Soit A/k une variété abélienne de dimension 2, simple et principalement polarisée. Soit $R \in A(k)$ un point de 3-torsion non nul. Soit $\widehat{\lambda}_{2\Theta,v}$ la hauteur locale normalisée comme dans la partie 2.2. Alors on a :*

$$\widehat{\lambda}_{2\Theta,v}(R) = \frac{1}{3}\log\Big|\delta_1(K_R)\Big|_v.$$

Démonstration. On note $v(f(P)) = -\log|f(P)|_v$. Il suffit de partir de l'équation fonctionnelle fixant la hauteur locale :

$$\widehat{\lambda}_{2\Theta,v}([2]R) - 4\widehat{\lambda}_{2\Theta,v}(R) = v(f(R)).$$

Comme R est un point de 3-torsion non nul, on a $[2]R = -R$. De plus le diviseur Θ est symétrique et défini grâce à un point de Weierstrass donc la hauteur locale est paire, ce qui implique :

$$-3\widehat{\lambda}_{2\Theta,v}(R) = v(f(R)),$$

d'où le résultat, en notant que dans la normalisation 2.2, $f(P) = \delta_1(K_P)$. $\square$

Lemme 4.6. *Soient k un corps de nombres et C/k une courbe de genre 2, dont on se donne un modèle hyperelliptique entier $y^2 = F(x) = a_5x^5 + ... + a_0$. Soit A la jacobienne de C. On note $D = 2^8\operatorname{disc}(F)$. Alors on a l'égalité :*

$$\prod_{R\in A[3]\backslash\{O\}} \delta_1(K_R) = \frac{1}{3^{24}}D^{36}.$$

Démonstration. On sait que si $D \neq 0$, la courbe C est lisse et les points d'ordre exactement 3 de $\mathrm{Jac}(C)$ ne sont pas sur le support du diviseur Θ. Ceci implique que $-R = [2]R$ n'est pas sur le support de Θ, donc $\delta_1(R) \neq 0$ pour tout point d'ordre 3. En contraposant on obtient l'implication : $\Big(\delta_1(R) = 0\Big) \Rightarrow \Big(D = 0\Big)$. On sait de plus que $\delta_1(K_R) \in \mathbb{Z}[k_1, ..., k_4][a_0, ..., a_5]$ et le degré total en les a_i est 3. Le degré total en les k_i est 4. Soit $L = \mathbb{Q}(a_0, ..., a_5)$. Les k_i étant les coordonnées des points d'ordre 3 ce sont des éléments algébriques sur L. On sait de plus que $[L[A[3]] : L] \leq 3^{16}$. Posons :

$$Q(a_0, ..., a_5) = \prod_{R\in A[3]\backslash\{O\}} \delta_1(K_R).$$

L'ensemble $A[3]\backslash\{O\}$ est stable sous l'action du groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\bar{L}/L)$. On peut en déduire que $Q \in \mathbb{Q}(a_0, ..., a_5)$. Or Q est une fraction rationnelle sans pôle : c'est donc un polynôme. On en déduit que $Q(a_0, ..., a_5) \in \mathbb{Q}[a_0, ..., a_5]$.

D'autre part on a $D \in \mathbb{Z}[a_0, ..., a_5]$ et D est irréductible. Ceci permet de dire qu'il existe des constantes universelles $c_0 \in \mathbb{Q}$ et $d_0 \in \mathbb{N}$ telles que :

$$Q = c_0 D^{d_0}.$$

(Notons que seules les puissances de D ne s'annulent sur aucun point d'ordre 3, voir l'article [13]. On peut aussi raisonner ainsi : il suffit de montrer l'égalité sur $\mathbb{C}$, ce qui est faisable en étudiant le poids, les zéros et les pôles de la forme Q/D^{36}.)

Dans un deuxième temps on cherche à expliciter les constantes c_0 et d_0. On sait que D est de poids 40 et δ_1 de poids 18. Comme il y a 80 termes $\delta_1(R)$, cela montre que $d_0 = 36$. Il suffit ensuite de mener le calcul complet dans un cas particulier. Nous allons choisir l'équation $y^2 = x^5 - 1$. On pose $F(x) = x^5 - 1$. On a donc $\mathrm{disc}(F) = 3125 = 5^5$.

On va calculer les coordonnées K_R des points R d'ordre 3 exactement pour cet exemple particulier. On note $K_R = (1, k_2, k_3, k_4)$ la coordonnée normalisée. Ces coordonnées vérifient tout d'abord l'équation de la surface de Kummer (donnée dans [2] page 19 ou dans l'annexe de [27]), qu'on notera $\delta_0 = 0$. Ces points vérifient de plus l'équation $K_{[2]R} = K_R$. On doit donc résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} \delta_2 - k_2\delta_1 &= 0, \\ \delta_3 - k_3\delta_1 &= 0, \\ \delta_4 - k_4\delta_1 &= 0, \\ \delta_0 &= 0. \end{cases}$$

On utilise alors les formules de duplication sur la surface de Kummer données en annexe de [27], dans lequelles on spécialise ainsi : $a_6 = 0$, $a_5 = 1$, $a_4 = a_3 = a_2 = a_1 = 0$, $a_0 = -1$ et $k_1 = 1$. A partir de là, on s'est ramené au problème de la recherche de racines communes à quatre polynômes fixés dépendant de trois variables k_2, k_3 et k_4.

On peut résoudre ce système en utilisant une technique de résultants : on prend le résultant des deux premiers polynômes par rapport à la première variable, puis le résultant du résultat avec le troisième polynôme par rapport à la deuxième variable et un dernier résultant en fonction de la dernière variable. On fait cela dans tous les ordres possibles. Ceci donne des valeurs possibles pour la dernière variable, on remonte ensuite les calculs et on vérifie *a posteriori* que les coordonnées candidates sont bien des solutions des quatre équations de départ. Une fois les coordonnées trouvées, le calcul de δ_1 est direct.

Les calculs ont été menés complètement en utilisant le logiciel PARI. Le résultat est le suivant :

$$Q(1, 0, 0, 0, 0, -1) = 2^{288} 3^{-24} 5^{180}.$$

Ceci fournit, puisqu'on a $D = 2^8 \,\mathrm{disc}(F) = 2^8 5^5$, les valeurs $c_0 = 3^{-24}$ et $d_0 = 36$. □

Définition 4.7. *On note $\mathcal{Z}_2$ l'ensemble des 10 caractéristiques paires en dimension 2, et $\theta_m(0, \tau)$ la constante thêta associée à la caractéristique m et la matrice de périodes τ. On définit alors le discriminant modulaire comme étant :*

$$\Delta(\tau) = 2^{-12} \prod_{m \in \mathcal{Z}_2} \theta_m(0, \tau)^2.$$

Lemme 4.8. *Soit A/k une surface abélienne simple sur un corps de nombres k. Soit v une place archimédienne et soit $A(\bar{k}_v) \simeq \mathbb{C}^2/\mathbb{Z}^2 + \tau_v\mathbb{Z}^2$ une uniformisation complexe. Pour tout point R d'ordre 3, on note $Z_R = X_R + \tau_v Y_R$ sa coordonnée complexe, avec $X_R, Y_R \in \mathbb{R}^2$. Posons $[a, b] = [1/2, 1/2, 0, 1/2]$. On a alors l'égalité suivante :*

$$\prod_{R \in T_3} \Big|\theta_{a,b}(R, \tau_v)\Big|_v e^{-\pi {}^tY_R \operatorname{Im} \tau_v Y_R} = 3^4 |\Delta(\tau_v)|_v^4.$$

Démonstration. Il suffit d'utiliser le théorème 2 page 234 de l'article [12] et les transformations classiques des fonctions thêta. □

Égalité Clef 4.9. *Soit $P \in A(k)$ et soit $n \geq 1$ tel que $[n]P \in A_\Theta(k)$:*

$$n^2\widehat{h}_{A,2\Theta}(P) = \sum_{v\in M_k^0} n_v\widehat{\lambda}_{2\Theta,v}([n]P) + \sum_{v\in M_k^\infty} n_v 2\Lambda_{\Theta,v}([n]P) + \frac{3}{20d}\log \mathrm{N}_{k/\mathbb{Q}}(D) + \frac{1}{10}\sum_{v\in M_k^\infty} n_v \log|\Delta(\tau_v)|_v.$$

Démonstration. On commence par écrire

$$n^2\widehat{h}_{A,2\Theta}(P) = \frac{1}{80}\sum_{R\in\mathcal{T}_3}\Big(\widehat{h}_{A,2\Theta}([n]P) - \widehat{h}_{A,2\Theta}(R)\Big) = \frac{1}{80}\sum_{R\in\mathcal{T}_3}\sum_{v\in M_k} n_v\Big(\widehat{\lambda}_{2\Theta,v}([n]P) - \widehat{\lambda}_{2\Theta,v}(R)\Big).$$

On utilise alors l'équation (6) aux places archimédiennes pour obtenir :

$$\begin{aligned} n^2\widehat{h}_{A,2\Theta}(P) = & \sum_{v\in M_k} n_v\widehat{\lambda}_{2\Theta,v}([n]P) - \frac{1}{80}\sum_{R\in\mathcal{T}_3}\sum_{v\in M_k^0} n_v\widehat{\lambda}_{2\Theta,v}(R) + \sum_{v\in M_k} 2n_v\Lambda_{\Theta,v}([n]P) \\ & -\frac{1}{80}\sum_{R\in\mathcal{T}_3}\sum_{v\in M_k^\infty} 2n_v\Lambda_{\Theta,v}(R) \end{aligned}$$

À ce stade, il suffit d'appliquer les lemmes 4.5 et 4.6 pour la somme sur les points d'ordre 3 aux places finies et le lemme 4.8 pour la somme sur les points d'ordre 3 aux places archimédiennes. On remarquera que les puissances de 3 disparaissent dans les constantes. □

Nous allons diviser le travail de minoration de la hauteur globale en quatre tâches :

(1) Pour v une place finie : minorer $\widehat{\lambda}_{2\Theta,v}([n]P)$.
(2) Pour v une place archimédienne : minorer $\Lambda_{\Theta,v}([n]P)$.
(3) Pour v une place archimédienne : minorer $|\Delta(\tau_v)|$.
(4) Redescendre sur le corps de base.

On traite du premier point dans le prochain paragraphe. Les études 2 et 3 aux places archimédiennes feront l'objet des parties suivantes. Le quatrième point sera traité à la fin de la preuve du théorème 1.8.

4.2. Estimation aux places finies.

Proposition 4.10. *La hauteur locale en une place finie, normalisée comme dans 2.2, peut être minorée de la façon suivante (pour P hors du support du diviseur Θ) :*

$$\widehat{\lambda}_{2\Theta,v}(P) \geq -\frac{1}{3}\Big(4\,\mathrm{ord}_v(2) + \mathrm{ord}_v(\mathrm{disc}(F))\Big)\log \mathrm{N}_{k/\mathbb{Q}}(v).$$

Démonstration. En étudiant des représentations du sous-groupe de 2-torsion de la jacobienne, M.Stoll ([36], théorème 6.1) a obtenu la minoration :

$$E_v(K) \geq \Big|2^4\,\mathrm{disc}(F)\Big|_v.$$

Ceci donne par un calcul direct la minoration annoncée. Remarquons qu'il est possible d'utiliser ce résultat de Stoll (écrit pour des sextiques) en prenant l'un des coefficients β_j égal à 0 dans son paragraphe 3. Cela induit les mêmes changements que pour les travaux de V. Flynn puisqu'il utilise le même plongement et les mêmes matrices agissant sur $\mathbb{P}^3$. □

4.3. Estimation aux places archimédiennes.

4.3.1. *Minoration de* $\Lambda_{\Theta,v}(P)$. On veut dans cette sous-partie minorer la hauteur locale archimédienne définie pour $P \in A_\Theta(\mathbb{C})$ par :

$$\Lambda_{\Theta,v}(P) = -\log\left(\left|\theta_{a,b}(Z(P))\right|_v e^{-\pi\,{}^t\operatorname{Im} Z(\operatorname{Im}\tau)^{-1}\operatorname{Im} Z}\right),$$

où on a fixé $[a,b] = [1/2, 1/2, 0, 1/2]$. Pour tout vecteur $x = [x_1, x_2] \in \mathbb{R}^2$, on définit la quantité $\delta(x) := \min\{d(x_1,\mathbb{Z}), d(x_2,\mathbb{Z})\}$. Nous montrons tout d'abord une batterie de lemmes analytiques utiles pour l'estimation des fonctions thêta :

Lemme 4.11. *Pour toute matrice* $\tau \in F_2$ *on a la minoration pour tout vecteur réel* $R = [R_1, R_2] \in \mathbb{R}^2$ *:*

$${}^tR\operatorname{Im}\tau R \geq (\operatorname{Im}\tau_1 - \operatorname{Im}\tau_{12})\,R_1^2 + (\operatorname{Im}\tau_2 - \operatorname{Im}\tau_{12})\,R_2^2.$$

Démonstration. Il suffit de développer la forme quadratique et d'écrire :

$$\begin{aligned} {}^tR\operatorname{Im}\tau R &= R_1^2\operatorname{Im}\tau_1 + R_2^2\operatorname{Im}\tau_2 + 2R_1R_2\operatorname{Im}\tau_{12} \\ &\geq R_1^2\operatorname{Im}\tau_1 + R_2^2\operatorname{Im}\tau_2 - (R_1^2 + R_2^2)\operatorname{Im}\tau_{12} \\ &\geq R_1^2(\operatorname{Im}\tau_1 - \operatorname{Im}\tau_{12}) + R_2^2(\operatorname{Im}\tau_2 - \operatorname{Im}\tau_{12}). \end{aligned}$$

On gardera en mémoire que $\operatorname{Im}\tau_2 \geq \operatorname{Im}\tau_1 \geq 2\operatorname{Im}\tau_{12} \geq 0$ et $\operatorname{Im}\tau_1 > 0$. Ces inégalités impliquent que le minorant est une fonction définie positive. □

Lemme 4.12. *Soit* $r > 0$ *un réel. Alors on a l'inégalité :*

$$\int_r^{+\infty} e^{-x^2}dx \leq \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-r^2}.$$

Démonstration. On se ramène au calcul en coordonnées polaires :

$$\left(\int_r^{+\infty} e^{-x^2}dx\right)^2 = \iint_{\substack{x\geq r\\ y\geq r}} e^{-x^2-y^2}dxdy \leq \iint_{\substack{\rho\geq r\sqrt{2}\\ \theta\in[0,\frac{\pi}{2}]}} e^{-\rho^2}\,\rho d\rho d\theta = \frac{\pi}{4}\,e^{-2r^2}.$$

□

Lemme 4.13. *Soient* $\alpha > 0$ *et* $\beta \in \mathbb{R}$. *Alors si* $\beta \notin \mathbb{Z}$ *:*

$$\sum_{n_1\in\mathbb{Z}} e^{-\alpha(n_1+\beta)^2} \leq \left(2 + \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\alpha}}\right)e^{-\alpha d(\beta,\mathbb{Z})^2},$$

et si $\beta \in \mathbb{Z}$ *:*

$$\sum_{n_1\in\mathbb{Z}} e^{-\alpha(n_1+\beta)^2} \leq 1 + \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\alpha}}.$$

De plus si $\beta = \frac{1}{2}$ *on a :*

$$\sum_{\substack{n_1\in\mathbb{Z}\\ n_1\neq -3,-2,-1,0,1,2}} e^{-\alpha(n_1+\beta)^2} \leq \left(\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\alpha}}\right)e^{-\alpha\frac{25}{4}}.$$

Enfin si $\beta = 0$ on a :

$$\sum_{\substack{n_1 \in \mathbb{Z} \\ n_1 \neq -1,0,1}} e^{-\alpha n_1^2} \leq \left(\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\alpha}} \right) e^{-\alpha}.$$

Démonstration. On démontre la première inégalité, $\beta \notin \mathbb{Z}$, les autres s'en déduisent. On mène une comparaison série-intégrale pour la fonction f donnée par $f(x) = e^{-\alpha(x+\beta)^2}$. On note n_0 le plus grand entier inférieur à $-\beta$ (on notera $n_0 = \lfloor -\beta \rfloor$) et on utilise la distance $d(\beta, \mathbb{Z}) = \min\{|n_0 + \beta|, |n_0 + 1 + \beta|\}$. On obtient alors la majoration :

$$\sum_{n_1 \in \mathbb{Z}} e^{-\alpha(n_1+\beta)^2} \leq \int_{-\infty}^{n_0} e^{-\alpha(x+\beta)^2} dx + e^{-\alpha(n_0+\beta)^2} + e^{-\alpha(n_0+1+\beta)^2} + \int_{n_0+1}^{+\infty} e^{-\alpha(x+\beta)^2} dx,$$

donc :

$$\sum_{n_1 \in \mathbb{Z}} e^{-\alpha(n_1+\beta)^2} \leq \int_{(-n_0-\beta)\sqrt{\alpha}}^{+\infty} e^{-x^2} \frac{dx}{\sqrt{\alpha}} + 2e^{-\alpha d(\beta,\mathbb{Z})^2} + \int_{(n_0+1+\beta)\sqrt{\alpha}}^{+\infty} e^{-x^2} \frac{dx}{\sqrt{\alpha}}.$$

Il suffit alors d'utiliser l'inégalité du lemme 4.12 pour conclure. □

Lemme 4.14. *Soient $\alpha > 0$ et $\beta \in \mathbb{R}$. Alors :*

$$\sum_{n_1 \in \mathbb{Z}} \left| n_1 + \frac{1}{2} \right| e^{-\alpha(n_1+\beta)^2} \leq C(\alpha, \beta) e^{-\alpha d(\beta,\mathbb{Z})^2},$$

où l'on peut prendre :

$$C(\alpha, \beta) = \frac{1}{\alpha} + \left| \beta - \frac{1}{2} \right| \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\alpha}} + \frac{1}{2} \left(\sqrt{\left(\beta - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{2}{\alpha}} + 2 \right)^2 + \frac{1}{2}.$$

Démonstration. On mène ici une comparaison série-intégrale pour la fonction f donnée par $f(x) = |x + \frac{1}{2}| e^{-\alpha(x+\beta)^2}$. Il y a ici trois changements de sens de variation (car il y en a un en $-1/2$). On notera $x_{\max 1} < -\frac{1}{2} < x_{\max 2}$ les abscisses des trois maxima locaux. L'étude de la dérivée donne les expressions $x_{\substack{\max 1 \\ \max 2}} = \frac{1}{2} \left(-\beta - 1/2 \mp \sqrt{(\beta + 1/2)^2 - 2\beta + 2/\alpha} \right)$. Posons $N_1 = \lfloor x_{\max 1} \rfloor$ et $N_2 = \lfloor x_{\max 2} \rfloor$, où $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière de x. On a alors la majoration :

$$\sum_{n_1 \in \mathbb{Z}} \left| n_1 + \frac{1}{2} \right| e^{-\alpha(n_1+\beta)^2} \leq A + B + C,$$

où :

$$A = \int_{-\infty}^{N_1} \left| x + \frac{1}{2} \right| e^{-\alpha(x+\beta)^2} dx, \quad B = \sum_{n_1 = N_1}^{N_2+1} \left| n_1 + \frac{1}{2} \right| e^{-\alpha(n_1+\beta)^2}, \quad C = \int_{N_2+1}^{+\infty} \left| x + \frac{1}{2} \right| e^{-\alpha(x+\beta)^2} dx.$$

Alors en posant $r = (-N_1 - \beta)\sqrt{\alpha} > 0$ on obtient par inégalité triangulaire :

$$A = \int_r^{+\infty} \left| \frac{x}{\sqrt{\alpha}} + \beta - \frac{1}{2} \right| e^{-x^2} \frac{dx}{\sqrt{\alpha}} \leq \frac{1}{\alpha} \int_r^{+\infty} x e^{-x^2} dx + \frac{|\beta - \frac{1}{2}|}{\sqrt{\alpha}} \int_r^{+\infty} e^{-x^2} dx,$$

donc par intégration directe et par l'inégalité du lemme 4.12 :

$$A \leq \frac{1}{2\alpha} e^{-\alpha(-N_1-\beta)^2} + \frac{|\beta - \frac{1}{2}|\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\alpha}} e^{-\alpha(-N_1-\beta)^2} \leq \left(\frac{1}{2\alpha} + \frac{|\beta - \frac{1}{2}|\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\alpha}} \right) e^{-\alpha d(\beta,\mathbb{Z})^2}.$$

On obtient la même majoration pour le terme C. Reste le terme médian :

$$B \leq \sum_{n_1=N_1}^{N_2+1} \Big| n_1 + \frac{1}{2} \Big| e^{-\alpha d(\beta,\mathbb{Z})^2} \leq \Big(\sum_{n_1=0}^{N_2+1} \Big(n_1 + \frac{1}{2} \Big) - \sum_{n_1=N_1}^{-1} \Big(n_1 + \frac{1}{2} \Big) \Big) e^{-\alpha d(\beta,\mathbb{Z})^2},$$

donc :

$$B e^{\alpha d(\beta,\mathbb{Z})^2} \leq \frac{N_1^2 + N_2^2 + 4N_2 + 4}{2} = \frac{(N_2 - N_1)^2 + 2N_1N_2 + 4N_2 + 4}{2},$$

donc en utilisant les inégalités $N_1 \leq -1$ et $2 \leq -2N_1$:

$$B e^{\alpha d(\beta,\mathbb{Z})^2} \leq \frac{(N_2 - N_1)^2 + 2(N_2 - N_1) + 2}{2} = \frac{(N_2 - N_1 + 1)^2 + 1}{2}.$$

Or $0 \leq N_2 - N_1 < x_{\max 2} - x_{\max 1} + 1 = \sqrt{(\beta - \frac{1}{2})^2 + \frac{2}{\alpha}} + 1$, donc :

$$B \leq \Big(\frac{1}{2} \Big(\sqrt{\Big(\beta - \frac{1}{2}\Big)^2 + \frac{2}{\alpha}} + 2 \Big)^2 + \frac{1}{2} \Big) e^{-\alpha d(\beta,\mathbb{Z})^2}.$$

Il suffit alors de réunir les majorations des termes A, B, C pour obtenir le lemme. □

Lemme 4.15. *On pose $\delta(a+Y) = \min\{d(\frac{1}{2}+y_1,\mathbb{Z}), d(\frac{1}{2}+y_2,\mathbb{Z})\}$. On suppose que $||(X,Y)|| \leq \frac{1}{2}$. On a alors la majoration pour tout $u \in [0,1]$:*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}^2} \Big| n_i + \frac{1}{2} \Big| e^{-\pi\, {}^t(n+a+Yu) \operatorname{Im}\tau (n+a+Yu)} \leq C_2(y_i) e^{-\pi(\operatorname{Tr}(\operatorname{Im}\tau) - 2\operatorname{Im}\tau_{12})\delta(a+Y)^2},$$

où l'on peut prendre : $C_2(y_i) = 4\Big(\frac{4}{\pi} + 2|y_i| + \frac{1}{2}\Big(\sqrt{y_i^2 + \frac{8}{\pi}} + 2\Big)^2 + \frac{1}{2}\Big)$.

Démonstration. On applique successivement les lemmes 4.11, 4.13 et 4.14 en spécialisant $\alpha = \pi(\operatorname{Im}\tau_i - \operatorname{Im}\tau_{12})$ et $\beta = \frac{1}{2} + uy_i$ (avec $u \in [0,1]$) pour $i \in \{1,2\}$. Le maximum sur u est atteint, pour le majorant, en $u = 1$, car $|y_i| \leq \frac{1}{2}$. □

Nous pouvons donc à présent montrer la proposition suivante :

Proposition 4.16. *Soit C/k une courbe de genre 2 et soit v une place archimédienne. Soit P un point de $\operatorname{Jac}(C)(\bar{k}_v) \cong \mathbb{C}^2/(\mathbb{Z}^2 + \tau_v\mathbb{Z}^2)$ hors du support du diviseur Θ. On note $Z = X + \tau_v Y$ une coordonnée de P, avec $Y = [y_1, y_2]$. On définit la norme de vecteur $||(X,Y)|| = \max\{|x_1|, |x_2|, |y_1|, |y_2|\}$. Alors la hauteur locale archimédienne $\Lambda_{\Theta,v}$ peut être minorée de la façon suivante, dès que $||(X,Y)|| \leq \frac{1}{2}$:*

$$\begin{aligned} \Lambda_{\Theta,v}(P) \quad &\geq \quad \pi(\operatorname{Tr}(\operatorname{Im}\tau_v) - 2\operatorname{Im}\tau_{v,12})\delta(a+Y)^2 - \log\Big(4 + \frac{3}{2}\operatorname{Tr}(\operatorname{Im}\tau_v)\Big) \\ &\quad + \log\frac{1}{||(X,Y)||} - \log C_3(Y), \end{aligned}$$

où l'on peut prendre : $C_3(Y) = \max_{i\in\{1,2\}} 8\pi\Big(\frac{4}{\pi} + 2|y_i| + \frac{1}{2}\Big(\sqrt{y_i^2 + \frac{8}{\pi}} + 2\Big)^2 + \frac{1}{2}\Big)$.

Remarque 4.17. On a la majoration $C_3(Y) \leq 239,2$ pour $y_i \leq 1/2$.

Démonstration. On notera tout au long de la preuve : $\tau = \tau_v$. Calculons, pour $Z = X + \tau Y$, avec X et Y des vecteurs de $\mathbb{R}^2$:

$$^t\operatorname{Im} Z(\operatorname{Im}\tau)^{-1}\operatorname{Im} Z = {}^t\operatorname{Im}(\tau Y)(\operatorname{Im}\tau)^{-1}\operatorname{Im}(\tau Y) = {}^tY\operatorname{Im}\tau Y.$$

Posons :

$$\zeta_n(X,Y) := 2i\pi\left(\frac{1}{2}\,{}^t(n+a)\tau(n+a) + {}^t(n+a)\tau Y + {}^t(n+a)(X+b)\right),$$

et :

$$g(X,Y) := \theta_{a,b}(X+\tau Y) = \sum_{n\in\mathbb{Z}^2} e^{\zeta_n(X,Y)}.$$

On veut donc majorer la quantité : $|g(X,Y)|e^{-\pi\,{}^tY\operatorname{Im}\tau Y}$. Tout d'abord par l'inégalité des accroissements finis, avec $||(X,Y)|| = \sup\{|x_1|,|x_2|,|y_1|,|y_2|\}$ et $|||.|||$ la norme subordonnée :

$$|g(X,Y)-g(0,0)| \leq \left(\max_{(X',Y')\in[(0,0),(X,Y)]}|||dg_{|(X',Y')}|||\right)||(X,Y)-(0,0)||.$$

donc comme $g(0,0) = \theta_{a,b}(0) = 0$:

$$|g(X,Y)| \leq \left(\max_{u\in[0,1]}|||dg_{|u(X,Y)}|||\right)||(X,Y)||.$$

On a alors en écrivant $[X,Y] = [x_1,\ x_2,\ y_1,\ y_2]$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial x_1}(X,Y) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}^2} 2\pi i\left(n_1+\frac{1}{2}\right)e^{\zeta_n(X,Y)},\\
\frac{\partial g}{\partial x_2}(X,Y) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}^2} 2\pi i\left(n_2+\frac{1}{2}\right)e^{\zeta_n(X,Y)},\\
\frac{\partial g}{\partial y_1}(X,Y) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}^2} 2\pi i\left(\left(n_1+\frac{1}{2}\right)\tau_1+\left(n_2+\frac{1}{2}\right)\tau_{12}\right)e^{\zeta_n(X,Y)},\\
\frac{\partial g}{\partial y_2}(X,Y) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}^2} 2\pi i\left(\left(n_1+\frac{1}{2}\right)\tau_{12}+\left(n_2+\frac{1}{2}\right)\tau_2\right)e^{\zeta_n(X,Y)}.
\end{aligned}$$

De plus :

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re}(\zeta_n(Xu,Yu)) &= -\pi\,{}^t(n+a)\operatorname{Im}\tau(n+a) - 2\pi\,{}^t(n+a)\operatorname{Im}\tau Yu\\
&= -\pi\,{}^t(n+a+Yu)\operatorname{Im}\tau(n+a+Yu) + \pi u^2\,{}^tY\operatorname{Im}\tau Y.
\end{aligned}$$

On obtient alors pour tout vecteur (X,Y) non nul :

$$\begin{aligned}
\frac{|g(X,Y)|}{2\pi||(X,Y)||} \leq \max_{u\in[0,1]} \Big[&\sum_{n\in\mathbb{Z}^2}\left(\left|n_1+\frac{1}{2}\right|+\left|n_2+\frac{1}{2}\right|\right)e^{\operatorname{Re}(\zeta_n(Xu,Yu))}\\
&+\sum_{n\in\mathbb{Z}^2}\left(\left|n_1+\frac{1}{2}\right||\tau_1|+\left|n_2+\frac{1}{2}\right||\tau_{12}|\right)e^{\operatorname{Re}(\zeta_n(Xu,Yu))}\\
&+\sum_{n\in\mathbb{Z}^2}\left(\left|n_1+\frac{1}{2}\right||\tau_{12}|+\left|n_2+\frac{1}{2}\right||\tau_2|\right)e^{\operatorname{Re}(\zeta_n(Xu,Yu))}\Big].
\end{aligned}$$

On obtient ainsi :

$$\frac{|g(X,Y)|e^{-\pi\,{}^tY\operatorname{Im}\tau Y}}{2\pi||(X,Y)||} \leq \max_{u\in[0,1]}\Big[\sum_{n\in\mathbb{Z}^2}\Big((1+|\tau_1|+|\tau_{12}|)\Big|n_1+\frac{1}{2}\Big|+ (1+|\tau_2|+|\tau_{12}|)\Big|n_2+\frac{1}{2}\Big|\Big)e^{\operatorname{Re}(\zeta_n(Xu,Yu))-\pi\,{}^tY\operatorname{Im}\tau Y}\Big],$$

donc :

$$\frac{|g(X,Y)|e^{-\pi\,{}^tY\operatorname{Im}\tau Y}}{2\pi||(X,Y)||} \leq \max_{u\in[0,1]}\Big[\sum_{n\in\mathbb{Z}^2}\Big((1+|\tau_1|+|\tau_{12}|)\Big|n_1+\frac{1}{2}\Big|+ (1+|\tau_2|+|\tau_{12}|)\Big|n_2+\frac{1}{2}\Big|\Big)e^{-\pi\,{}^t(n+a+Yu)\operatorname{Im}\tau(n+a+Yu)}\Big].$$

On utilise alors le lemme 4.15 dans la dernière majoration :

$$\frac{|g(X,Y)|e^{-\pi\,{}^tY\operatorname{Im}\tau Y}}{2\pi||(X,Y)||} \leq (1+|\tau_1|+|\tau_{12}|)C_2(y_1)e^{-\pi(\operatorname{Tr}(\operatorname{Im}\tau)-2\operatorname{Im}\tau_{12})\delta(a+Y)^2} +(1+|\tau_2|+|\tau_{12}|)C_2(y_2)e^{-\pi(\operatorname{Tr}(\operatorname{Im}\tau)-2\operatorname{Im}\tau_{12})\delta(a+Y)^2},$$

donc on obtient en notant $C_2(Y):=\max\{C_2(y_1),C_2(y_2)\}$:

$$\frac{|g(X,Y)|e^{-\pi\,{}^tY\operatorname{Im}\tau Y}}{2\pi||(X,Y)||} \leq (2+|\tau_1|+|\tau_2|+2|\tau_{12}|)C_2(Y)e^{-\pi(\operatorname{Tr}(\operatorname{Im}\tau)-2\operatorname{Im}\tau_{12})\delta(a+Y)^2}.$$

En prenant l'opposé du logarithme de cette dernière inégalité il vient finalement :

$$\Lambda_{\Theta,v}(P) \geq \pi(\operatorname{Tr}(\operatorname{Im}\tau)-2\operatorname{Im}\tau_{12})\delta(a+Y)^2-\log(2+|\tau_1|+|\tau_2|+2|\tau_{12}|) +\log\frac{1}{||(X,Y)||}-\log 2\pi C_2(Y),$$

De plus, en utilisant $|\tau_i|\leq\frac{1}{2}+\operatorname{Im}\tau_i$ et $|\tau_{12}|\leq\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\operatorname{Im}\tau_i$ pour $i=1$ et $i=2$ on obtient :

$$\log(2+|\tau_1|+|\tau_2|+2|\tau_{12}|)\leq\log\Big(4+\frac{3}{2}\operatorname{Tr}(\operatorname{Im}\tau)\Big).$$

Ceci achève la preuve de la proposition 4.16. □

4.3.2. *Minoration de* $|\Delta(\tau_v)|$. On va donner dans cette section une minoration de la norme des constantes thêta paires en dimension 2. Soit v une place archimédienne. On note ici $\tau=\tau_v$. Comme $\Delta(\tau)$ s'annule uniquement en $\tau_{12}=0$ (pour τ dans F_2, voir par exemple [16], proposition 2 page 115), on s'attend à voir apparaître une condition sur l'espace de modules des surfaces abéliennes principalement polarisées.

Il y a dix constantes thêta $\theta_{ab}(0,\tau)$ non nulles en dimension 2 ; elles correspondent exactement aux caractéristiques paires :

$$\begin{bmatrix} a\\ b\end{bmatrix}\in\theta_1=\left\{\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1/2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\1/2\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\1/2\\1/2\end{bmatrix}\right\},$$

$$\left[\begin{array}{c} a \\ b \end{array}\right] \in \theta_2 = \left\{ \left[\begin{array}{c} 1/2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right], \left[\begin{array}{c} 0 \\ 1/2 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right], \left[\begin{array}{c} 1/2 \\ 1/2 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right], \left[\begin{array}{c} 0 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{array}\right], \left[\begin{array}{c} 1/2 \\ 0 \\ 0 \\ 1/2 \end{array}\right], \left[\begin{array}{c} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{array}\right] \right\}.$$

On a donc $\mathcal{Z}_2 = \theta_1 \cup \theta_2$.

On rappelle la relation :

$$\left|\theta_{ab}(0,\tau)\right| = \left|\theta_{00}(\tau a + b, \tau) e^{i\pi\, {}^t a \tau a + 2i\pi\, {}^t ab}\right| = \left|\theta_{00}(\tau a + b, \tau)\right| e^{-\pi\, {}^t a \operatorname{Im} \tau a}.$$

Si on pose $Q_{a,b}(n) = {}^t (n+a)\tau(n+a) + 2\,{}^t(n+a)(b)$, on a de plus :

$$\theta_{a,b}(0,\tau) = \sum_{n\in\mathbb{Z}^2} e^{i\pi Q_{a,b}(n)}.$$

Lemme 4.18. *Soit $(a,b) \in \mathcal{Z}_2$. Soit $T_{a,b} = \left\{ n \in \mathbb{Z}^2 \mid \operatorname{Im} Q_{a,b}(n) = \min_{m\in\mathbb{Z}^2} \operatorname{Im} Q_{a,b}(m) \right\}$. On a la propriété :*

$$\forall n, n' \in T_{a,b},\ e^{i\pi Q_{a,b}(n)} = e^{i\pi Q_{a,b}(n')}.$$

De plus :

$$\left|\theta_{a,b}(0,\tau)\right| \geq 2 \operatorname{Card}(T_{a,b}) e^{-\pi \min_{m\in\mathbb{Z}^2} \operatorname{Im} Q_{a,b}(m)} - \sum_{n\in\mathbb{Z}^2} e^{-\pi \operatorname{Im} Q_{a,b}(n)}.$$

Démonstration. La propriété de l'énoncé se vérifie directement sur les dix couples $(a,b) \in \mathcal{Z}_2$. En effet remarquons tout d'abord que $T_{a,b}$ est un ensemble fini pour $(a,b) \in \mathcal{Z}_2$. Il est de cardinal 1 lorsque $a = 0$ et de cardinal 2 sinon. La propriété de cet ensemble se vérifie alors directement en calculant $Q_{a,b}(n)$ pour $n \in \{-1,0\}^2$. L'inégalité triangulaire donne ensuite :

$$\left|\theta_{a,b}(0,\tau)\right| \geq \left|\sum_{n\in T_{a,b}} e^{i\pi Q_{a,b}(n)}\right| - \left|\sum_{n\in\mathbb{Z}^2\setminus T_{a,b}} e^{i\pi Q_{a,b}(n)}\right|.$$

Le choix de $T_{a,b}$ implique $\sum_{n\in T_{a,b}} e^{i\pi Q_{a,b}(n)} = \operatorname{Card}(T_{a,b}) e^{i\pi Q_{a,b}(m)}$ pour un m quelconque choisi dans $T_{a,b}$. On obtient alors directement l'inégalité annoncée en utilisant :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}^2\setminus T_{a,b}} e^{-\pi \operatorname{Im} Q_{a,b}(n)} + \sum_{n\in T_{a,b}} e^{-\pi \operatorname{Im} Q_{a,b}(n)} = \sum_{n\in\mathbb{Z}^2} e^{-\pi \operatorname{Im} Q_{a,b}(n)}.$$

□

Proposition 4.19. *Pour les caractéristiques $[a,b] \in \theta_1$ (donc vérifiant $a = 0$) on a la minoration, valable pour tout $\tau \in F_2$:*

$$\left|\theta_{ab}(0,\tau)\right| \geq f_1(\tau),$$

où on a posé

$$f_1(\tau) = 1 - \left(4e^{-\pi\sqrt{3}/2} + \sum_{n_1^2+n_2^2>1} e^{-\pi\frac{\sqrt{3}}{4}(n_1^2+n_2^2)} \right).$$

Une estimation directe donne $f_1(\tau) \geq 0,44$.

Démonstration. On utilise le lemme 4.18. On a dans ce cas $\min\limits_{m\in\mathbb{Z}^2} \operatorname{Im} Q_{a,b}(m) = 0$ et $T_{a,b} = \{(0,0)\}$. Il suffit alors d'utiliser [16] page 116.

□

Proposition 4.20. *Soit* $[a,b] = [1/2,0,0,0]$ *ou* $[a,b] = [1/2,0,0,1/2]$. *On a la minoration, valable pour tout* $\tau \in F_2$ *:*

$$\Big|\theta_{ab}(0,\tau)\Big| e^{\pi\, {}^t a \operatorname{Im}\tau a} \geq f_2(\tau),$$

où on a posé

$$f_2(\tau) = 2 - \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}^2\setminus\{(0,0),(-1,0)\}} e^{-\pi\frac{\sqrt{3}}{4}(n_1(n_1+1)+n_2^2)} \right).$$

De plus on déduit le minorant pour les caractéristiques $[a,b] = [0,1/2,0,0]$ *et* $[a,b] = [0,1/2,1/2,0]$ *en permutant les coordonnées dans cette dernière expression.*

Une estimation directe donne $f_2(\tau) \geq 0,75$.

Démonstration. On fait le calcul pour la caractéristique $[1/2,0,0,0]$, le deuxième calcul se déduit du premier en changeant n_1 en n_2.

On a ici : $\min\limits_{m\in\mathbb{Z}^2} \operatorname{Im} Q_{a,b}(m) =^t a \operatorname{Im}\tau a$ et $T_{a,b} = \{(0,0),(-1,0)\}$. On utilise le lemme 4.18 et [16] page 117.

□

Lemme 4.21. *Soit* z *un nombre complexe vérifiant* $\operatorname{Im} z \geq 0$ *et* $|\operatorname{Re} z| \leq \frac{1}{2}$. *Alors on a les inégalités :*

(1) $|e^{i\pi z}+1| \geq 1$,

(2) $|e^{i\pi z}-1| \geq 0,28\min\{1,\ \pi|z|\}$.

Démonstration. Le première inégalité est immédiate. Pour la seconde, on peut commencer par supposer $\pi|z|<1$. Dans ce cas nous avons

$$|e^{i\pi z}-1| = |i\pi z + \sum_{k=2}^{\infty}\frac{(i\pi z)^k}{k!}| \geq \pi|z| - \sum_{k=2}^{\infty}\frac{(\pi|z|)^k}{k!} = \pi|z|(2+\frac{1-e^{\pi|z|}}{\pi|z|}) \geq \pi|z|(3-e) \geq 0,28\pi|z|.$$

À présent si $\pi|z|\geq 1$, cela implique que $M = \max\{\pi\operatorname{Im} z,\ \pi\operatorname{Re} z\} \geq 1/\sqrt{2}$. Si $M = \pi\operatorname{Im} z$, on calcule alors

$$|e^{i\pi z}-1|^2 = 1+e^{-2\pi\operatorname{Im} z}-2e^{-\pi\operatorname{Im} z}\cos(\operatorname{Re} z\,\pi) \geq 1+e^{-2\pi\operatorname{Im} z}-2e^{-\pi\operatorname{Im} z} \geq 1+e^{-\pi\sqrt{2}}-2e^{-\pi/\sqrt{2}}.$$

Si $M = \pi\operatorname{Re} z$, on écrit

$$|e^{i\pi z}-1|^2 = 1+e^{-2\pi\operatorname{Im} z}-2e^{-\pi\operatorname{Im} z}\cos(\operatorname{Re} z\,\pi) \geq 1+e^{-2\pi\operatorname{Im} z}-2e^{-\pi\operatorname{Im} z}\cos(\frac{1}{\sqrt{2}}) \geq 1-\cos^2(\frac{1}{\sqrt{2}}).$$

On peut donc minorer, dans le cas où $\pi|z|\geq 1$:

$$|e^{i\pi z}-1|^2 \geq \min\{1+e^{-\pi\sqrt{2}}-2e^{-\pi/\sqrt{2}},\ 1-\cos^2(\frac{1}{\sqrt{2}})\} \geq 0,25.$$

□

Proposition 4.22. *Soit $[a,b]=[1/2,1/2,\varepsilon/2,\varepsilon/2]$, avec $\varepsilon\in\{0,1\}$. On a la minoration :*

$$\Big|\theta_{ab}(0,\tau)\Big|e^{\pi\,({}^t a\operatorname{Im}\tau a-\operatorname{Im}\tau_{12})}\geq f_{3,\varepsilon}(\tau),$$

où on a posé

$$f_{3,\varepsilon}(\tau)=2|1+(-1)^{\varepsilon}e^{\pi i\tau_{12}}|\left(2-\left(\sum_{m=0}^{+\infty}e^{-\frac{\pi\sqrt{3}}{4}m(m+1)}(2m+1)\right)^2\right).$$

Remarque 4.23. Pour que le minorant soit strictement positif lorsque $\varepsilon=1$, on doit donc imposer $\tau_{12}\neq 0$, ce qui souligne le fait qu'un produit de deux courbes elliptiques est un cas dégénéré de variétés abéliennes principalement polarisées de dimension 2.

Démonstration. On procède comme pour la proposition précédente. On a ici :

$$\min_{m\in\mathbb{Z}^2}\operatorname{Im}Q_{a,b}(m)={}^t a\operatorname{Im}\tau a-\operatorname{Im}\tau_{12}\quad\text{ et }\quad T_{a,b}=\{(0,-1),(-1,0)\}.$$

On obtient le résultat par l'application du lemme 4.18 et de [16] page 117. □

Il ne reste plus qu'à réunir les calculs précédents :

Proposition 4.24. *Soit $\tau\in F_2$. On a la minoration :*

$$\Big|\Delta(\tau)\Big|\geq c_0\min\{1,\pi|\tau_{12}|\}^2\,e^{-2\pi(\operatorname{Tr}(\operatorname{Im}\tau)-\operatorname{Im}\tau_{12})},$$

et on peut prendre $c_0=5.10^{-9}$.

Démonstration. On commence par écrire $\Delta(\tau)=2^{-12}\prod_{m\in\mathcal{Z}_2}\theta_m(0,\tau)^2$ puis en utilisant les notations des propositions 4.19, 4.20 et 4.22 on a la minoration :

$$\Big|\Delta(\tau)\Big|\geq 2^{-12}f_1(\tau)^8f_2(\tau)^8f_{3,0}(\tau)^2f_{3,1}(\tau)^2e^{-2\pi(\operatorname{Tr}(\operatorname{Im}\tau)-\operatorname{Im}\tau_{12})}.$$

Il suffit ensuite d'utiliser le lemme 4.21 et les estimations numériques précédentes. □

5. Minoration globale de la hauteur de Néron-Tate

On montre dans cette partie comment à partir des informations locales on peut obtenir un théorème global de minoration de la hauteur de Néron-Tate sur une jacobienne de dimension 2.

5.1. **Lemme de zéros et principe des tiroirs.**

Lemme 5.1. *Soit k un corps de nombres. Soit C/k une courbe de genre 2 plongée dans A sa jacobienne. Soient P_1 et P_2 des points non nuls de $A(k)$ tels que $P_1+P_2\neq 0$. Alors :*

$$\{\pm P_1,\,\pm P_2,\,\pm(P_1+P_2)\}\not\subseteq C(k).$$

Démonstration. La preuve proposée ici montre un résultat un peu plus général. Soient $S_1=\{T_1,...,T_r\}$ et $S_2=\{Q_1,...,Q_r\}$ deux ensembles de points de $A(k)$ à exactement $r\geq 2$ éléments. On suppose que $S_1+S_2\subset C(k)$.

Posons alors $C^{(1)}=\bigcap_{t\in S_1}(C-t)$. C'est une sous-variété non vide et stricte de A, sa dimension vaut donc 0 ou 1. Or si $t\neq O$, l'ensemble $C\cap(C-t)$ est fini (cela vient du fait que Θ est associé à une polarisation principale) ; donc la dimension de $C^{(1)}$ est zéro car $\mathrm{Card}(S_1) \geq 2$. Comme de plus $S_2 \subset C^{(1)}$ par construction, il vient :

$$r = \mathrm{Card}(S_2) \leq \deg(C^{(1)}) \leq 2,$$

la dernière inégalité étant justifiée par le fait que $C\cdot C = 2! = 2$ (comme auto-intersection de diviseur).

On obtient alors le lemme en prenant $S_1 = \{O, P_1, -P_2\}$ et $S_2 = \{O, -P_1, P_2\}$: on sait que $r = 3$ dans ce cas grâce aux hypothèses sur P_1 et P_2, il vient donc par contraposée :

$$S_1 + S_2 = \{O, P_1, P_2, P_1 + P_2, -P_1, -P_2, -P_1 - P_2\} \nsubseteq C(k).$$

Il suffit de remarquer que $O \in C(k)$ pour conclure. □

Remarque 5.2. On peut déduire de ce lemme une nouvelle preuve de la propriété 4.2. Soit Q un point d'ordre 3 exactement. On pose dans le lemme précédent $S_1 = S_2 = \{O, Q, -Q\}$. Alors le lemme permet d'affirmer :

$$\{O, Q, -Q\} + \{O, Q, -Q\} = \{O, \pm Q, \pm[2]Q\} = \{O, \pm Q\} \nsubseteq C(k),$$

ce qui permet de conclure : $Q \notin C(k)$.

Proposition 5.3. *Soit k un corps de nombres, on pose $m = |M_k^\infty|$. Soit C/k une courbe de genre 2, on note $A = \mathrm{Jac}(C)$ sa jacobienne. Soit $M > 2$ un réel. Soit $P \in A(k)$ un point tel que ses multiples $\{[n]P, n \in [\![0, 2M^{4m}]\!]\}$ soient tous distincts. Il vient alors :*

$$\exists n \in [\![0, 2M^{4m}]\!],\ [n]P \notin \Theta,\ \forall v \in M_k^\infty,$$

$$\Lambda_{\Theta,v}([n]P) \geq (1/2 - 1/M)^2 \pi\Big(\mathrm{Tr}(\mathrm{Im}\,\tau_v) - 2\,\mathrm{Im}\,\tau_{12,v}\Big) - \log\Big(4 + \frac{3}{2}\mathrm{Tr}(\mathrm{Im}\,\tau_v)\Big) + \log\frac{M}{240}.$$

Démonstration. On a les applications :

$$A(\bar{k}_v) \longrightarrow \mathbb{C}^2/(\mathbb{Z}^2 + \tau_v\mathbb{Z}^2) \longrightarrow \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \times \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$$
$$P \longmapsto Z_v(P) = X_v(P) + \tau_v Y_v(P) \longmapsto (X_v(P), Y_v(P)).$$

Soit alors l'application $F : A(k) \longrightarrow (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^{4m}$ définie par :

$$F(P) = (X_v(P), Y_v(P))_{v \in M_k^\infty}.$$

On divise alors $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^{4m}$ en M^{4m} boîtes de taille $\frac{1}{M}$. On considère alors l'ensemble $\{F([n]P), n \in [\![0, 2M^{4m}]\!]\}$: il contient $2M^{4m}+1$ points à répartir dans M^{4m} boîtes. Par le principe des tiroirs il existe donc trois entiers n_1, n_2 et n_3 tels que, avec $i > j$:

$$0 \leq n_1 < n_2 < n_3 \leq 2M^{4m},\ \ n_i - n_j \leq 2M^{4m},$$

$$||X_v([n_i - n_j]P)|| \leq \frac{1}{M},\ \ ||Y_v([n_i - n_j]P)|| \leq \frac{1}{M}.$$

Posons $P_1 = [n_3 - n_2]P$ et $P_2 = [n_2 - n_1]P$. Alors $P_1 + P_2 = [n_3 - n_1]P$. En appliquant le lemme 5.1, on sait que dans l'ensemble de points $\{P_1, P_2, P_1 + P_2, -P_1, -P_2, -P_1 - P_2\}$ il y en a au moins un qui n'est pas sur le diviseur Θ. C'est ce point qu'on choisit : on le note $[n]P$ (ou peut-être $[n](-P)$, le fait de prendre éventuellement l'opposé n'est pas gênant car la hauteur locale est paire).

On a $||(X, Y)|| \leq 1/M$ et $d(1/2 + y_i, \mathbb{Z})^2 \geq (1/2 - 1/M)^2$. On obtient alors, en reportant ces approximations dans la proposition 4.16 :

$$\Lambda_{\Theta,v}([n]P) \geq (1/2 - 1/M)^2 \pi\Big(\mathrm{Tr}(\mathrm{Im}\,\tau_v) - 2\,\mathrm{Im}\,\tau_{v,12}\Big) - \log\Big(4 + \frac{3}{2}\mathrm{Tr}(\mathrm{Im}\,\tau_v)\Big) + \log\frac{M}{240}.$$

□

5.2. **Minoration globale : preuve du théorème 1.8.**

Démonstration. Soit $k' = k(A[3])$. Posons $m' = |M_{k'}^{\infty}|$ et $d' = [k' : \mathbb{Q}]$. Prenons $M > 2$ un paramètre réel à fixer ultérieurement. Écrivons l'égalité-clef 4.9 sur k' en choisissant pour n l'entier donné par le principe des tiroirs de 5.3 :

$$n^2\widehat{h}_{A,2\Theta}(P) = \sum_{v\in M_k^0} n_v\widehat{\lambda}_{2\Theta,v}([n]P)+\sum_{v\in M_k^{\infty}} n_v 2\Lambda_{\Theta,v}([n]P)+\frac{3}{20d}\log \mathrm{N}_{k/\mathbb{Q}}(D)+\frac{1}{10}\sum_{v\in M_k^{\infty}} n_v\log|\Delta(\tau_v)|_v.$$

Il suffit alors d'appliquer les minorations locales des propositions 4.10, 4.24 et 5.3 pour obtenir :

$$\begin{aligned} n^2\widehat{h}_{A,2\Theta}(P) \;\geq\; & \sum_{v\in M_{k'}^0} n_v\Big(\Big(-\frac{1}{3}+\frac{3}{20}\Big)\mathrm{ord}_v(D)+\frac{4}{3}\mathrm{ord}_v(2)\Big)\log \mathrm{N}_{k/\mathbb{Q}}(v)\\ &+\sum_{v\in M_{k'}^{\infty}} n_v\Big(\Big(2\Big(\frac{1}{2}-\frac{1}{M}\Big)^2-\frac{2}{10}\Big)\pi\,\mathrm{Tr}(\mathrm{Im}\,\tau_v)+\Big(\frac{2}{10}-4\Big(\frac{1}{2}-\frac{1}{M}\Big)^2\Big)\pi\,\mathrm{Im}\,\tau_{12}\Big)\\ &+\sum_{v\in M_{k'}^{\infty}} n_v\Big(-2\log\Big(4+\frac{3}{2}\mathrm{Tr}(\mathrm{Im}\,\tau_v)\Big)+\frac{1}{10}\log\Big(c_0\min\{1,\pi|\tau_{12}|_v\}^2\Big)+2\log\frac{M}{240}\Big), \end{aligned}$$

donc en utilisant $\mathrm{Tr}(\mathrm{Im}\,\tau)\geq 4\,\mathrm{Im}\,\tau_{12}$ on obtient :

$$\begin{aligned} n^2\widehat{h}_{A,2\Theta}(P) \geq & -\frac{11}{60d'}\log \mathrm{N}_{k/\mathbb{Q}}(D)+\sum_{v\in M_{k'}^{\infty}} n_v\Big(\Big(\Big(\frac{1}{2}-\frac{1}{M}\Big)^2-\frac{2}{10}\Big)\pi\,\mathrm{Tr}(\mathrm{Im}\,\tau_v)+\frac{2}{10}\pi\,\mathrm{Im}\,\tau_{12}\Big)\\ &+\sum_{v\in M_{k'}^{\infty}} n_v\Big(-2\log\Big(4+\frac{3}{2}\mathrm{Tr}(\mathrm{Im}\,\tau_v)\Big)+\frac{1}{10}\log\Big(c_0\min\{1,\pi|\tau_{12}|_v\}^2\Big)\Big)+2\log\frac{M2^{2/3}}{240}, \end{aligned}$$

donc comme $\mathrm{Im}\,\tau_{12}\geq|\tau_{12}|-\frac{1}{2}\geq\log|\tau_{12}|$:

$$\begin{aligned} n^2\widehat{h}_{A,2\Theta}(P) \;\geq\; & \sum_{v\in M_{k'}^{\infty}} n_v\Big[\Big(\Big(\frac{1}{2}-\frac{1}{M}\Big)^2-\frac{1}{5}\Big)\pi\,\mathrm{Tr}(\mathrm{Im}\,\tau_v)-2\log\Big(4+\frac{3}{2}\mathrm{Tr}(\mathrm{Im}\,\tau_v)\Big)\Big]\\ &-\frac{11}{60d'}\log \mathrm{N}_{k/\mathbb{Q}}(D)+\frac{1}{5d'}\log\prod_{v\in M_{k'}^{\infty}}|\tau_{12}|_v^{d_v}+2\log\frac{Mc_0^{1/20}\pi^{1/5}2^{2/3}}{240}. \end{aligned}$$

Prenons à présent pour M la partie entière supérieure de $240c_0^{-1/20}\pi^{-1/5}2^{-2/3}\sqrt{1044}$, ce qui numériquement donne $M = 10087$.

Un calcul de variation fournit alors

$$\Big(\Big(\frac{1}{2}-\frac{1}{M}\Big)^2-\frac{1}{5}\Big)\pi\,\mathrm{Tr}(\mathrm{Im}\,\tau_v)-2\log\Big(4+\frac{3}{2}\mathrm{Tr}(\mathrm{Im}\,\tau_v)\Big)+6{,}95\geq 0{,}12\,\mathrm{Tr}(\mathrm{Im}\,\tau_v).$$

On tient alors compte de $n \leq 2 \cdot 10087^{4d'}$. On conclut cette preuve en redescendant sur le corps de base. On sait que la variété est définie sur k. De plus les quantités $\frac{1}{d}\operatorname{Tr}_\infty(A)$, $\frac{1}{d}s_\infty(A)$ et $\frac{1}{d}\log \mathrm{N}_{k/\mathbb{Q}}(D)$ sont invariantes par extension de corps : pour la trace archimédienne et la simplicité archimédienne c'est montré dans le corollaire 1.15, pour le discriminant c'est une conséquence directe de la multiplicativité des normes et de la multiplicativité des degrés. On a donc :

$$\frac{1}{d'}\Big(\operatorname{Tr}_\infty(A) - \frac{5}{3}\log\frac{\mathrm{N}_{k'/\mathbb{Q}}(D)}{\mathrm{s}_\infty(A)}\Big) = \frac{1}{d}\Big(\operatorname{Tr}_\infty(A) - \frac{5}{3}\log\frac{\mathrm{N}_{k/\mathbb{Q}}(D)}{\mathrm{s}_\infty(A)}\Big).$$

Enfin par multiplicativité des degrés à nouveau : $d' = [k' : k]d \leq 3^{16}d$. Pour la version B du théorème, il suffit de prendre $M = 10087\ \mathrm{N}_{k'/\mathbb{Q}}(D)^{5/6d'}\, s_\infty(A)^{-5/6d'}$. □

6. La hauteur de Faltings

6.1. Expression dans le modèle d'Igusa. Soit k un corps de nombres. Soient C/k une coube lisse de genre 2 et $A = \operatorname{Jac}(C)$ sa jacobienne. Notons $h_{\mathrm{F}}(A/k)$ la hauteur de Faltings de la variété abélienne A/k. On suppose de plus que la courbe localisée C_p est lisse de genre 2 en toute place p divisant 2. On note $\Delta_{\min}$ le discriminant minimal associé aux modèles d'Igusa de la courbe C, lequel est utilisé dans [38] et défini dans le paragraphe suivant. On notera $\mathcal{Z}_2$ l'ensemble des caractéristiques paires de dimension 2. En se référant aux travaux de K. Ueno de l'article [38] page 765 on a :

$$h_{\mathrm{F}}(A/k) = \frac{1}{10d}\left[\sum_{p\in M_k^0} d_p \operatorname{ord}_p(2^{-12}\Delta_{\min})\log \mathrm{N}_{k/\mathbb{Q}}(p) - \sum_{v\in M_k^\infty} d_v \log\Big|\Delta(\tau_v)\det(\operatorname{Im}\tau_v)^5\Big|\right].$$

La formule obtenue pour la hauteur de Faltings modifiée est donc :

$$h'_{\mathrm{F}}(A/k) = \frac{1}{10d}\left[\sum_{p\in M_k^0} d_p \operatorname{ord}_p(2^{-12}\Delta_{\min})\log \mathrm{N}_{k/\mathbb{Q}}(p) - \sum_{v\in M_k^\infty} d_v \log\Big|\Delta(\tau_v)\Big|\right].$$

6.2. Comparaison entre discriminants.

Lemme 6.1. *Soit C/k une courbe de genre 2 donnée dans le modèle $y^2 = F(x)$ hyperelliptique entier sur k (comme dans l'article* [10]*), avec bonne réduction en toute place divisant* 2*. Le discriminant $\Delta_{\min}$ introduit dans l'article* [38] *du modèle d'Igusa de C vérifie :*

$$\sum_{p\in M_k^0} d_p \operatorname{ord}_p(2^{-12}\Delta_{\min})\log \mathrm{N}_{k/\mathbb{Q}}(p) \leq \sum_{p\in M_k^0} d_p \operatorname{ord}_p(2^8\operatorname{disc}(F))\log \mathrm{N}_{k/\mathbb{Q}}(p).$$

Démonstration. Le modèle d'Igusa est donné par une équation du type :

$$xy^2 + (1 + ax + bx^2)y + x^2(c + dx + x^2) = 0.$$

Son discriminant est défini dans [38] comme étant le discriminant de l'équation hyperelliptique :

$$y^2 = (1 + ax + bx^2)^2 - 4x^3(c + dx + x^2),$$

corrigé par une puissance de 2, afin de tenir compte du comportement aux places de k divisant 2. Le discriminant minimal donné dans [38] est donc de norme inférieure ou égale au discriminant minimal de la courbe hyperelliptique C (car il est plus petit pour la valuation en 2). Ce discriminant sera en particulier de norme inférieure ou égale à celle du discriminant du modèle hyperelliptique de Flynn-Smart (qui n'est pas forcément le produit des discriminants minimaux locaux), on consultera par exemple [20] page 4581 et suivantes. □

6.3. **Majoration de $h'_{\mathrm{F}}(A/k)$: preuve du théorème 1.13.** On montre dans ce paragraphe une majoration de la hauteur de Faltings des surfaces abéliennes simples. La présence de la quantité $\Delta(\tau)$ aux places archimédiennes, quantité qui s'annule en $\tau_{12}=0$, impose la condition $\tau_{12}\neq 0$.

Démonstration. Pour le terme non archimédien on a en utilisant le lemme 6.1 :

$$\sum_{p\in M_k^0} d_p \operatorname{ord}_p(2^{-12}\Delta_{\min})\log \mathrm{N}_{k/\mathbb{Q}}(p) \leq \sum_{p\in M_k^0} d_p \operatorname{ord}_p(2^{8}\operatorname{disc}(F))\log \mathrm{N}_{k/\mathbb{Q}}(p),$$

donc en utilisant la proposition 4.24 :

$$\begin{aligned} 10d\, h'_{\mathrm{F}}(A/k) \quad &\leq \quad \log \mathrm{N}_{k/\mathbb{Q}}(D) + \sum_{v\in M_k^\infty} d_v\Big(2\pi(\operatorname{Im}\tau_{v,1}+\operatorname{Im}\tau_{v,2}-\operatorname{Im}\tau_{v,12})\Big) \\ &\quad - \sum_{v\in M_k^\infty} d_v \log\Big(c_0\min\{1,\pi|\tau_{12}|_v\}^2\Big). \end{aligned}$$

En utilisant l'estimation $c_0 = 5.10^{-9}$ de la proposition 4.24 et les inégalité $\operatorname{Im}\tau_{12,v}\geq \log|\tau_{12}|_v$ et $\operatorname{Tr}(\operatorname{Im}\tau_v)\geq\sqrt{3}$ il vient alors :

$$h'_{\mathrm{F}}(A/k)\leq \frac{1}{10d}\log\frac{\mathrm{N}_{k/\mathbb{Q}}(D)}{s_\infty(A)}+\frac{1}{10}\sum_{v\in M_k^\infty} n_v\Big(6\pi(\operatorname{Im}\tau_{v,1}+\operatorname{Im}\tau_{v,2})\Big).$$

□

7. PRODUIT DE COURBES ELLIPTIQUES

On donne dans ce paragraphe un théorème équivalent pour le cas des produits de courbes elliptiques. Ce résultat est directement construit à partir des références [35] et [14] et est écrit en détails dans [27]. Ce théorème est plus faible que le résultat de M. Hindry et J. Silverman de [14] mais permet d'obtenir un énoncé plus homogène pour les variétés abéliennes de dimension 2. Dans toute cette partie, les matrices de périodes τ_v sont dans le domaine fondamental usuel.

Théorème 7.1. *Soit k un corps de nombres de degré d. On note $m=|M_k^\infty|$. Alors il existe une constante $c_1(d)>0$ telle que pour toute courbe elliptique E/k de discriminant minimal Δ_E et de trace archimédienne $\operatorname{Tr}_\infty(E)$, et pour tout point $P\in E(k)$ d'ordre infini :*

$$\widehat{h}_E(P)\geq c_1\left(\operatorname{Tr}_\infty(E)-\frac{1}{7,2}\log \mathrm{N}_{k/\mathbb{Q}}(\Delta_E)\right),$$

où on peut prendre $c_1 = 0,3\cdot\left(d\,20^{4m}\right)^{-1}$.

Remarque 7.2. On va être amené dans la suite du texte à imposer $\operatorname{Tr}_\infty(E)\geq\frac{1}{7}\log \mathrm{N}_{k/\mathbb{Q}}(\Delta_E)$. Étudions cette condition sur $\mathbb{Q}$. Fixons une courbe elliptique $E/\mathbb{Q}$ et supposons $|j(E)|\gg 1$. Alors :

$$\operatorname{Tr}_\infty(E)=\operatorname{Im}\tau_E=-\frac{1}{2\pi}\log|q_E|\simeq\frac{1}{2\pi}\log|j(E)|.$$

Donc si $|j(E)|$ est grand, une hypothèse du type $\mathrm{Tr}_\infty(E) \gg \frac{1}{7}\log|\Delta_E|$ équivaut à $|j(E)| \gg |\Delta_E|^{\frac{2\pi}{7}}$. Or on a la relation $j(E) = 1728c_4^3/\Delta_E$, où c_4 est un polynôme en les coefficients de la courbe elliptique (voir [34] page 46). On a donc :

$$|c_4|^3 \gg |\Delta_E|^{1+\frac{2\pi}{7}}.$$

La conjecture de Hall (voir [34] page 268) donne l'inégalité :

$$|\Delta_E| \gg |c_4|^{\frac{1}{2}-\varepsilon}.$$

Comme $3 > \frac{1}{2} + \frac{\pi}{7}$, ces inégalités sont compatibles, mais il est important de garder à l'esprit que la constante de comparaison entre la trace archimédienne et le logarithme du discriminant ne saurait être trop grande dans le cas de la dimension 1.

Si on s'autorise des extensions de corps, on peut bien entendu raisonner comme dans la remarque 1.9 pour obtenir des familles de courbes elliptiques avec $\mathrm{Tr}_\infty(E)/\log|\mathrm{N}_{k/\mathbb{Q}}(\Delta_E)|$ grand.

7.1. **Majoration de la hauteur de Faltings.** Nous allons montrer dans cette partie la majoration suivante :

Théorème 7.3. *Soit E/k une courbe elliptique donnée dans un modèle entier de Weierstrass de discriminant Δ_E et de trace archimédienne $\mathrm{Tr}_\infty(E)$. Alors on a :*

$$h'_{\mathrm{F}}(E/k) \leq c_3 \mathrm{Tr}_\infty(E) + c_4 \log \mathrm{N}_{k/\mathbb{Q}}(\Delta_E),$$

où on peut prendre $c_3 = \frac{2\pi}{12d}$ et $c_4 = \frac{1}{12d}$.

Démonstration. On connaît une expression explicite de la hauteur de Faltings d'une courbe elliptique E définie sur un corps de nombres k (voir par exemple [3] page 254) :

$$h_{\mathrm{F}}(E/k) = \frac{1}{12d}\left(\log \mathrm{N}_{k/\mathbb{Q}}(\Delta_E) - \sum_{v\in M_k^\infty} d_v \log|\Delta(\tau_v)(\mathrm{Im}\,\tau_v)^6|\right).$$

Ceci donne :

$$h'_{\mathrm{F}}(E/k) = \frac{1}{12d}\left(\log \mathrm{N}_{k/\mathbb{Q}}(\Delta_E) - \sum_{v\in M_k^\infty} d_v \log|\Delta(\tau_v)|\right).$$

Partant de cette expression il suffit donc de relier la fonction $\Delta(\tau_v)$ à la quantité $\mathrm{Im}\,\tau_v$. On note $q = \exp(2i\pi\tau_v)$; on a la formule :

$$\Delta(\tau_v) = (2\pi)^{12} q \prod_{n=1}^{+\infty}(1-q^n)^{24},$$

donc :

$$-\log|\Delta(\tau_v)| \leq 2\pi\,\mathrm{Im}\,\tau_v - 12\log 2\pi + 24C_{\tau_v},$$

avec :

$$C_{\tau_v} = -\sum_{n=1}^{+\infty}\log|1-q^n| \leq -\sum_{n=1}^{+\infty}\log(1-e^{-2\pi\,\mathrm{Im}\,\tau_v n}) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} 2e^{-2\pi\,\mathrm{Im}\,\tau_v n},$$

où on a utilisé, pour $x \leq 1/2$ l'inégalité $-\log(1-x) \leq 2x$. Donc :

$$C_{\tau_v} \leq 2\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-2\pi\,\mathrm{Im}\,\tau_v n} = 2\frac{e^{-2\pi\,\mathrm{Im}\,\tau_v}}{1-e^{-2\pi\,\mathrm{Im}\,\tau_v}} \leq 2\frac{e^{-\sqrt{3}\pi}}{1-e^{-\sqrt{3}\pi}} \leq 0,01.$$

Il suffit d'injecter cette majoration dans l'expression de la hauteur de Faltings et d'utiliser $2\pi \operatorname{Im} \tau_v - 12 \log 2\pi + 0,24 \leq 2\pi \operatorname{Im} \tau_v$ pour conclure. □

8. Corollaires

On présente dans cette partie plusieurs énoncés. Les premiers corollaires constituent une avancée en direction de la conjecture de Lang et Silverman en dimension 2. Par la suite on présente une borne uniforme explicite pour la torsion d'une famille de variétés abéliennes de dimension 2. Enfin on obtient une borne explicite sur le nombre de points rationnels pour des familles de courbes de genre 2.

8.1. **Conjecture de Lang et Silverman en dimension 2.** Soit $(A, \mathcal{D})$ une variété abélienne principalement polarisée de dimension 2. Comme expliqué dans l'introduction, il y a alors deux possibilités (on pourra aussi consulter [39]) :

$$\begin{cases} (A, \mathcal{D}) \simeq (E_1 \times E_2,\ E_1 \times \{O\} + \{O\} \times E_2), \\ \text{ou} \\ (A, \mathcal{D}) \simeq (\operatorname{Jac}(C), \Theta), \end{cases}$$

où C est une courbe algébrique de genre 2. Dans le premier cas, en notant $\mathcal{L} = E_1 \times \{O\} + \{O\} \times E_2$, on a les relations :

$$\begin{cases} \widehat{h}_{E_1\times E_2, \mathcal{L}}((P_1, P_2)) = \widehat{h}_{E_1}(P_1) + \widehat{h}_{E_2}(P_2), \\ \\ h_{\mathrm{F}}(E_1 \times E_2/k) = h_{\mathrm{F}}(E_1/k) + h_{\mathrm{F}}(E_2/k). \end{cases}$$

Remarque 8.1. On peut éventuellement translater le diviseur $(E_1 \times \{O\} + \{O\} \times E_2)$ par un point Q de 2-torsion, ce qui ne change pas le calcul en vertu du fait que $\widehat{h}_E(P + Q) = \widehat{h}_E(P)$ pour tout point P de E.

Ceci permet donc d'utiliser les théorèmes 7.1 et 7.3 pour obtenir un énoncé dans la direction de la conjecture de Lang et Silverman :

Corollaire 8.2. *Soient E_1/k et E_2/k deux courbes elliptiques. On considère la variété abélienne $E_1 \times E_2$ munie de la polarisation $E_1 \times \{O\} + \{O\} \times E_2$. On pose pour $i = 1, 2$:*

$$\operatorname{Tr}_\infty(E_i) = \sum_{v \in M_k^\infty} d_v \operatorname{Im} \tau_v^{(i)}.$$

On suppose que $\operatorname{Tr}_\infty(E_i) \geq \frac{1}{7} \log \mathrm{N}_{k/\mathbb{Q}}(\Delta_{E_i})$. Alors pour tout $P_1 \in E_1(k)$ et $P_2 \in E_2(k)$ points d'ordre infini :

$$\widehat{h}_{E_1 \times E_2}(P_1, P_2) \geq c_0\ h_{\mathrm{F}}(E_1 \times E_2/k),$$

où on peut prendre $c_0 = 0,0025 \cdot 20^{-4m}$.

Démonstration. En utilisant les théorèmes 7.1 et 7.3 on a les estimations pour chacune des courbes E_i avec $i \in \{1, 2\}$:

$$\widehat{h}_{E_i}(P) \geq c_1 \operatorname{Tr}_\infty(E_i) - c_2 \log \mathrm{N}_{k/\mathbb{Q}}(\Delta_{E_i}),$$

$$h_{\mathrm{F}}(E_i/k) \leq c_3 \operatorname{Tr}_\infty(E_i) + c_4 \log \mathrm{N}_{k/\mathbb{Q}}(\Delta_{E_i}),$$

où on peut prendre :

$$c_1 = \frac{0.3}{d\, 20^{4m}}, \quad c_2 = \frac{1}{24d\, 20^{4m}}, \quad c_3 = \frac{2\pi}{12d}, \quad c_4 = \frac{1}{12d}.$$

En utilisant de plus l'hypothèse $\mathrm{Tr}_\infty(E_i) \geq \frac{1}{7}\log \mathrm{N}_{k/\mathbb{Q}}(\Delta_{E_i})$ il vient :

$$\widehat{h}_{E_1\times E_2}(P_1,P_2)=\widehat{h}_{E_1}(P_1)+\widehat{h}_{E_2}(P_2)\geq c_0\ h_{\mathrm{F}}(E_1/k)+c_0\ h_{\mathrm{F}}(E_2/k)=c_0\ h_{\mathrm{F}}(E_1\times E_2/k),$$

où on a noté :

$$c_0=\left(c_1-\frac{c_2}{1/7}\right)\left(c_3+\frac{c_4}{1/7}\right)^{-1}=\frac{c_1-7c_2}{c_3+7c_4}.$$

□

Il reste donc à étudier le cas des jacobiennes de courbes de genre 2. Or nous sommes à présent en mesure de construire un énoncé de théorème répondant partiellement à la conjecture de Lang et Silverman pour ces variétés abéliennes particulières.

En réunissant les résultats des théorèmes 1.8 et 1.13 on obtient une preuve du corollaire 1.14, en considérant toujours $D=2^8\,\mathrm{disc}(F)$ si $C : y^2=F(x)$ avec $\deg(F)=5$ et $\mathrm{Tr}_\infty(A)$ la trace archimédienne de A :

Démonstration. En utilisant les théorèmes 1.8 et 1.13 on a les estimations :

$$\widehat{h}_{A,2\Theta}(P)\geq c_1\left(\mathrm{Tr}_\infty(A)-\frac{5}{3}\log\frac{\mathrm{N}_{k/\mathbb{Q}}(D)}{\mathrm{s}_\infty(A)}\right),$$

et :

$$h'_{\mathrm{F}}(A/k)\leq c_3\,\mathrm{Tr}_\infty(A)+c_4\log\frac{\mathrm{N}_{k/\mathbb{Q}}(D)}{\mathrm{s}_\infty(A)}.$$

En notant :

$$c_1=\tfrac{0{,}03}{d\,100878^{8\cdot 3^{16}d}}\quad c_2=\tfrac{5}{3}c_1\quad c_3=\tfrac{6\pi}{10\,d}\quad c_4=\tfrac{1}{10\,d}$$

et en supposant : $\mathrm{Tr}_\infty(A)\geq(5/3+\varepsilon)\log\mathrm{N}_{k/\mathbb{Q}}(D)$, on obtient alors :

$$\widehat{h}_{A,2\Theta}(P)\geq\left(c_1-\frac{c_2}{5/3+\varepsilon}\right)\left(c_3+\frac{c_4}{5/3+\varepsilon}\right)^{-1}h'_{\mathrm{F}}(A/k).$$

□

On déduit de ces énoncés le corollaire suivant :

Corollaire 8.3. *Soit k un corps de nombres de degré d. Alors il existe une constante $c=c(d)>0$ ne dépendant que du degré de k telle que pour toute variété abélienne (A,Θ) sur k, principalement polarisée de dimension 2, vérifiant les hypothèses des énoncés 8.2 ou 1.14 et pour tout point $P\in A(k)$ tel que $\mathbb{Z}\cdot P$ est Zariski-dense on a :*

$$\widehat{h}_{A,\Theta}(P)\geq c\ h'_{\mathrm{F}}(A/k),$$

et on peut prendre $c=\min\{c_0,c_1\}=c_1$, avec c_0 et c_1 les constantes données respectivement dans les énoncés 8.2 et 1.14.

Remarque 8.4. On obtient la conjecture de Lang et Silverman (sous les hypothèses des énoncés utilisés) en remarquant que $h'_{\mathrm{F}}(A/k)\geq h_{\mathrm{F}}(A/k)$ est valable lorsque $\mathrm{Im}\,\tau$ est suffisament grand.

On peut de plus déduire de 1.14 une preuve du corollaire 1.15 :

Démonstration. On sait que si le modèle de la courbe est à bonne réduction partout et est globalement minimal on obtient $\mathrm{N}_{k/\mathbb{Q}}(D) = 1$. Or il existe une extension k' de k telle que A/k' est à bonne réduction partout. On va voir qu'en faisant une autre extension bien choisie on peut de plus obtenir l'existence d'un modèle globalement minimal : donnons-nous tout d'abord un modèle hyperelliptique entier sur $\mathcal{O}_k$ de C, dont le discriminant sera noté Δ_C. En se reportant par exemple à [21] page 736, on sait que pour toute place finie v, il existe un entier u_v tel que $\Delta_C = u_v^{40}\Delta_v$, où Δ_v est le discriminant minimal local. L'exposant 40 vient du fait qu'on est ici en dimension $g = 2$, et $4g(2g+1) = 40$ dans ce cas.

On pose alors $\mathfrak{a}_C := \prod_v \mathfrak{p}_v^{-\operatorname{ord}_v(u_v)}$. On obtient facilement les faits suivants (voir [21]) : $\Delta_{\min} = \Delta_C(\mathfrak{a}_C)^{40}$, où $\Delta_{\min}$ est le discriminant minimal de la courbe hyperelliptique C. De plus la classe d'idéaux de $\mathfrak{a}_C$ ne dépend pas du modèle hyperelliptique de C. Enfin il existe un modèle minimal global si et seulement si $\mathfrak{a}_C$ est principal.

Or sur k', on a bonne réduction partout, ce qui impose $\Delta_{\min}\mathcal{O}_{k'} = \mathcal{O}_{k'}$. En particulier on obtient que l'idéal $\mathfrak{a}_C^{40}$ est principal sur k'. Il existe donc $\alpha \in k'$ tel que $\mathfrak{a}_C^{40} = \alpha\mathcal{O}_{k'}$. Considérons alors $k'' = k'[\beta]$, avec $\beta^{40} = \alpha$. Alors $\mathfrak{a}_C = \beta\mathcal{O}_{k''}$ est principal sur k'', et le degré de l'extension $[k'' : k']$ est inférieur ou égal à 40.

La variété abélienne A étant définie sur k, elle l'est aussi sur k' et k''. De plus on a les relations :

$$\forall w \in M_{k''}^{\infty},\ \ w|v \Rightarrow\ \tau_w = \tau_v.$$

On peut donc appliquer les théorèmes 1.8 et 1.13 à A/k'' puisque les τ_w vérifient les mêmes conditions que les τ_v, donc en utilisant de plus $\mathrm{s}_\infty(A) \geq 1$:

$$\widehat{h}_{A,2\Theta}(P) \geq \frac{1}{10087^{8[k'':\mathbb{Q}]}}\frac{1}{20\pi}\ h'_{\mathrm{st}}(A).$$

Or $[k'' : \mathbb{Q}] = [k'' : k'][k' : k][k : \mathbb{Q}]$ et on peut déduire de [32] page 400, en choisissant $k' = k[A[15]]$ que $[k' : k] \leq 15^{4\times 4}$. Remarquons qu'il suffit de redescendre sur le corps de base à la fin, d'où la présence du terme 15^{16} et non de $3^{16}\cdot 15^{16}$. $\square$

Remarque 8.5. On aurait pu essayer de se placer sur l'extension k' de k sur laquelle la variété admet bonne réduction partout, puis monter jusqu'à $H_{k'}$ le corps de classes de Hilbert de k' sur lequel le modèle est globalement minimal (par principalité) et a toujours bonne réduction partout. Cependant la constante obtenue dépendra alors du corps k' aussi.

8.2. **Borne pour la torsion d'une jacobienne de dimension 2.** Le principe des tiroirs utilisé dans la preuve du théorème 5.3 montre le fait suivant : si on peut obtenir suffisamment de multiples distincts d'un point P, alors la hauteur de Néron-Tate de ce point est minorée par une quantité non nulle, donc ce point n'est pas un point de torsion. Inversement on va donc obtenir une borne sur la torsion des jacobiennes sur lesquelles on a travaillé dans le théorème 1.8. Il suffit d'élever la borne sur l'exposant du groupe à la puissance $2g = 4$ pour obtenir la preuve du corollaire 1.12.

8.3. **Borne pour les points rationnels d'une courbe de genre 2.** L'obtention d'un résultat de minoration du type Lang-Silverman sur une famille de jacobiennes donne systématiquement un majorant du nombre de points rationnels des courbes sous-jacentes. Le calcul de ce majorant en fonction de la constante de l'inégalité de Lang-Silverman est montré dans [28], Proposition 1.10. Ainsi, pour obtenir une preuve du corollaire 1.16, il suffit d'appliquer la Proposition 1.10 de [28], avec ici $g = 2$. Ces questions ont été abordées par G. Rémond, voir la proposition 3.7 page 527 de l'article [31] ainsi que les estimations de [6] (page 652, page 662 et page 665) et T. de Diego, voir par exemple [7] page 109.

Références

[1] Boxall, J. and Grant, D., *Examples of torsion points on genus two curves.* Trans. Amer. Math. Soc. **352** (2000), 4533-4555.

[2] Cassels, J. W. S. and Flynn, E. V., *Prolegomena to a middlebrow arithmetic of curves of genus* 2. London Mathematical Society Lecture Note Series **230** (1996).

[3] Cornell, G. and Silverman, J. H. (editors), *Arithmetic geometry.* Springer-Verlag (1986).

[4] David, S., *Autour d'une conjecture de S. Lang.* Approximations diophantiennes et nombres transcendants (Luminy, 1990) (1992), 65–98.

[5] David, S., *Minorations de hauteurs sur les variétés abéliennes.* Bull. Soc. Math. France **121** (1993), 509–544.

[6] David, S. and Philippon, P., *Minorations des hauteurs normalisées des sous-variétés de variétés abeliennes. II.* Comment. Math. Helv. **77** (2002), 639–700.

[7] De Diego, T., *Points rationnels sur les familles de courbes de genre au moins 2.* J. Number Theory **67** (1997), 85–114.

[8] Faltings, G., *Endlichkeitssätze für abelsche Varietäten über Zahlkörpern.* Invent. Math. **73** (1983), 349–366.

[9] Flynn, E. V., *An explicit theory of heights.* Trans. Amer. Math. Soc. **347** (1995), 3003–3015.

[10] Flynn, E. V. and Smart, N. P., *Canonical heights on the Jacobians of curves of genus* 2 *and the infinite descent.* Acta Arith. **79** (1997), 333–352.

[11] Freitag, E., *Siegelsche Modulfunktionen.* Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften **254** (1983).

[12] Grant, D., *Some product formulas for theta functions in one and two variables.* Acta Arith. **102** (2002), no. 3, 223–238.

[13] Grant, D., *Units from* 3- *and* 4-*torsion on Jacobians of curves of genus* 2. Compositio Math. **94** (1994), no. 3, 311–320.

[14] Hindry, M. and Silverman, J.H., *The canonical height and integral points on elliptic curves.* Invent. Math. **93** (1988), 419–450.

[15] Igusa, J.-I., *On Siegel modular forms of genus two.* Amer. J. Math. **84** (1962), 175–200.

[16] Klingen, H., *Introductory lectures on Siegel modular forms.* Cambridge studies in adv. math. **20**, Cambridge University Press (1990), 112–123.

[17] Krir, M., *À propos de la conjecture de Lang sur la minoration de la hauteur de Néron-Tate pour les courbes elliptiques sur* $\mathbb{Q}$. Acta Arith. **100** (2001), 1–16.

[18] Lang, S., *Elliptic curves : Diophantine analysis.* Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften **231** (1978).

[19] Lange, H. and Birkenhake, C., *Complex abelian varieties.* Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften **302** (1992).

[20] Liu, Q., *Modèles entiers des courbes hyperelliptiques sur un corps de valuation discrète.* Trans. Amer. Math. Soc. **348** (1996), 4577-4610.

[21] Lockhart, P., *On the discriminant of a hyperelliptic curve.* Trans. Amer. Math. Soc. **342** (1994), 729-752.

[22] Masser, D. W., *Large period matrices and a conjecture of Lang.* Séminaire de Théorie des Nombres, Paris, 1991–92 **116** (1993), 153–177.

[23] Mumford, D., *Tata lectures on theta. I.* Progress in Mathematics, Birkhäuser Boston Inc., **28** (1983).

[24] Mumford, D., *Tata lectures on theta. II.* The University of Michigan Press, **43** (1984).

[25] Mumford, D., *Curves and their Jacobians.* Progress in Mathematics, Birkhäuser Boston Inc., **43** (1975).

[26] Néron, A., *Quasi-fonctions et hauteurs sur les variétés abéliennes.* Ann. of Math. (2), **82** (1965).

[27] Pazuki, M.F., *Minoration de la hauteur de Néron-Tate sur les variétés abéliennes : sur la conjecture de Lang et Silverman*. Thèse (2008).

[28] Pazuki, M.F., *Theta height and Faltings height (after Bost and David)*. Preprint, arXiv 0907.1458 (2009).

[29] Petsche, C., *Small rational points on elliptic curves over number fields*. New York J. Math. **12** (2006), 1–14.

[30] Rémond, G., *Hauteurs thêta et construction de Kodaira*. J. Number Theory **78** (1999), 287–311.

[31] Rémond, G., *Décompte dans une conjecture de Lang*. Invent. Math. **142** (2000), 513–545.

[32] Silverman, J. H., *Lower bound for the canonical height on elliptic curves*. Duke Math. J. **48** (1981), 633–648.

[33] Silverman, J. H., *Lower bounds for height functions*. Duke Math. J. **51** (1984), 395–403.

[34] Silverman, J. H., *The arithmetic of elliptic curves*. Graduate Texts in Mathematics **106** (1992).

[35] Silverman, J. H., *Advanced topics in the arithmetic of elliptic curves*. Graduate Texts in Mathematics **151** (1994).

[36] Stoll, M., *On the height constant for curves of genus two*. Acta Arith. **90** (1999), 183–201.

[37] Stoll, M., *On the height constant for curves of genus two II*. Acta Arith. **104** (2002), 165–182.

[38] Ueno, K., *Discriminants of curves of genus* 2 *and arithmetic surfaces*. Algebraic geometry and commutative algebra, Vol. II, Kinokuniya (1988), 749–770.

[39] Weil, A., *Zum Beweis des Torellischen Satzes*. Nachr. Akad. Wiss. Göttingen. Math.-Phys. Kl. IIa. (1957), 33–53.

[40] Yoshitomi, K., *On height functions on Jacobian surfaces*. Manuscripta Math. **96** (1998), 37–66.

Fabien Pazuki
Théorie des nombres, IMB Université Bordeaux 1
351, cours de la Libération, 33405 Talence cedex, France
e-mail : fabien.pazuki@math.u-bordeaux1.fr